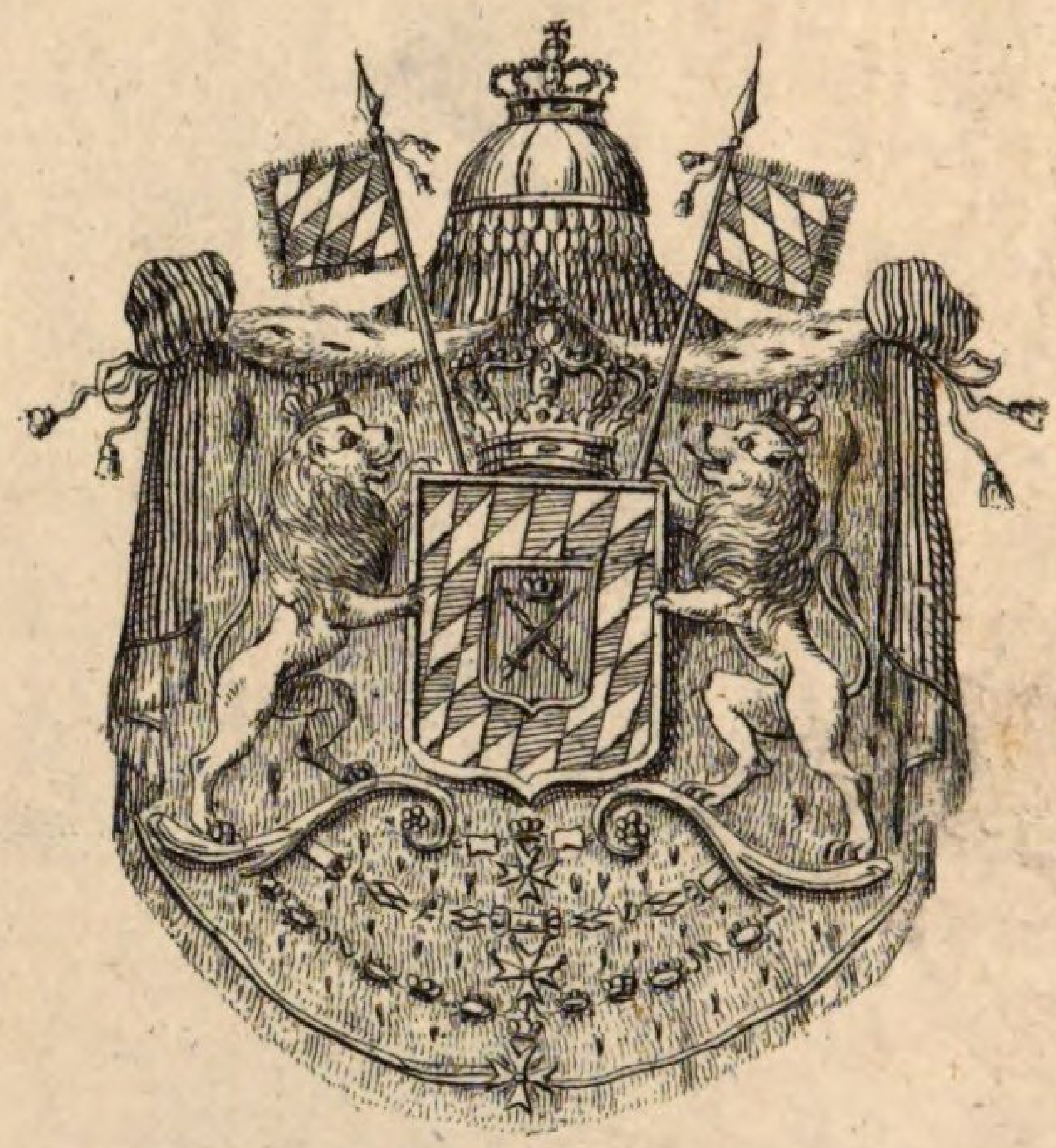
Math. P.
369c

Math. P 369c



BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

R

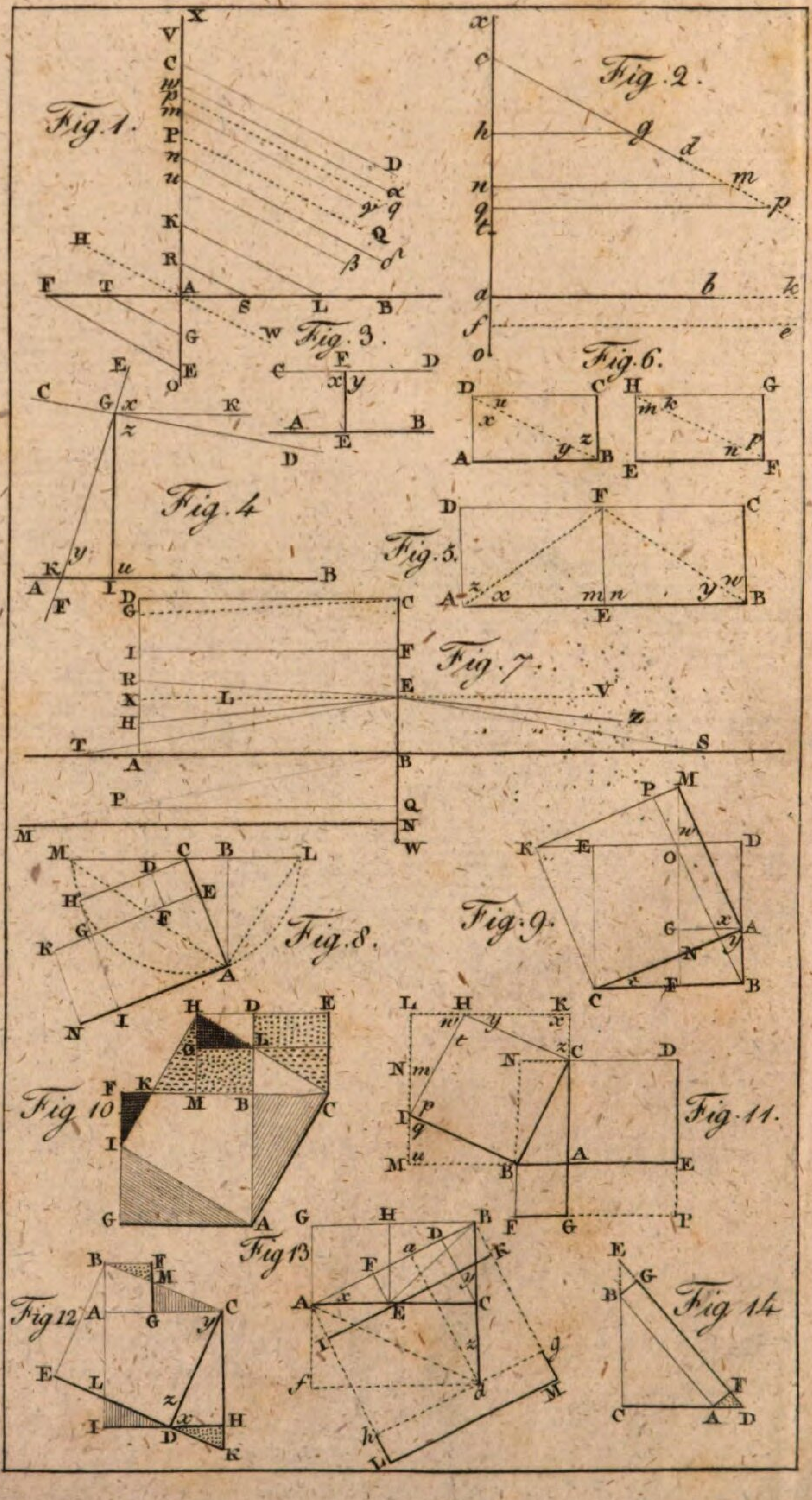


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig 10
Fig. 11.
Fig 12
Fig 13
Fig 14

Neue Beiträge zu der Parallelen-Theorie,

den

Beweisen des Pythagoräischen Lehrsatzes

und den

Berechnungsarten der Pythagoräischen Zahlendreiecke;

von

Johann Wolfgang Müller,

Professor der Mathematik.

Bayerische Staatsbibliothek München

Augsburg und Leipzig,

in der

von Jenisch und Stageschen Buchhandlung.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Neuer Beitrag

zu der

Theorie der Parallellinien.

I.

Beweis

des

sogenannten eilften Grundsatzes Euklid's.

Erster Satz.

Lehrsatz. (Fig. 1 und 2.)

Wenn von zwei in einerlei Ebene befindlichen geraden Linien AB und CD (Fig. 1) die eine AB mit einer dritten geraden Linie XO einen rechten, und die andere CD irgend einen spitzigen, an der nem-

lichen Seite der XO liegenden und gegen AB gekehrten Winkel ACD mit dieser XO macht, so treffen die beiden geraden Linien AB und CD hinlänglich verlängert nach der Gegend zusammen, nach welcher zu die beiden genannten Winkel liegen.

Beweis.

Man ziehe (Fig. 2) eine gerade Linie ab, errichte auf ihr ax senkrecht, (1 B. 11 S. Euklid,) mache ac = AC (Fig. 1), setze an den Punkt c auf der ac einen Winkel acd, der dem Winkel ACD (Fig. 1) gleich ist (1 B. 23 S. Euklid), und ziehe von irgend einem Punkt der cd oder ihrer Verlängerung eine senkrechte Linie auf xo (1 B. 12 S. Euklid), so liegt diese vor dem spitzigen Winkel acd, (denn ausserdem entstünde ein Dreieck, welches einen rechten und einen stumpfen Winkel hätte, welches unmöglich ist (1 B. 17 S. Euklid), und entweder unter ab wie ef, oder in ab wie ka, oder zwischen cd und ab, wie gh. Im ersten Fall trift die verlängerte ab mit der verlängerten cd zusammen, denn in dem Dreieck cef ist bei f ein rechter Winkel, so wie auch bei a, also ist ab mit fe parallel (1 B. 28 S. Euklid), das heißt: ab trift mit fe nicht

zusammen, so weit auch beide Linien verlängert werden, daher schneidet die verlängerte a b die verlängerte c d in einem Punkt k, der zwischen c und e liegt, und für diesen Fall ist also der Lehrsatz erwiesen. Im zweiten Fall, da a b in a k liegt, wird auch die Verlängerung der a b in der a k liegen, also die verlängerte a b die verlängerte c d im Punkt k treffen, und für diesen Fall ist also der Lehrsatz auch erwiesen. Im dritten Fall, da g h zwischen c d und a b liegt, liegt auch ihr Endpunkt h zwischen a und c. Denn läge er in a, so würden aus dem nemlichen Punkt a zweierlei senkrechte Linien auf a c errichtet seyn, welches unmöglich ist, und läge h unter a, so würde a b von g h geschnitten, und daher ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln entstehen, welches gleichfalls unmöglich ist. Also liegt h zwischen a und c, und c h ist kleiner als a c oder als A C (Fig. 1). Man mache also (Fig. 1) A K = h c, A L = h g, und ziehe K L, so ist das Dreieck A K L congruent mit dem Dreieck c g h (Fig. 2), also ist der Winkel A K L = h c g = A C D, und K liegt zwischen den Punkten C und A. Wäre daher A C = A K, so würde C D die A B schneiden. Man verlängere nun c d beliebig (Fig. 2), und ziehe aus

willkührlichen Punkten der verlängerten c d auf c o senkrechte Linien, z. B. mn, pq u. s. f. Gesetzt nun, es sei möglich, daß alle senkrechten Linien, die man sich von der in das Unendliche verlängerten c d auf c o gezogen vorstellt, die c o in Punkten n, q u. s. f. treffen, die zwischen h und a liegen, und die einen gewissen Punkt t der a c wohl immer näher kommen, ohne ihn jedoch zu erreichen, so daß alle zwischen den Punkten t und c auf a c errichteten senkrechten Linien verlängert die c d oder ihre Verlängerung schneiden, hingegen alle zwischen t und o u. s. f. auf c a und ihrer Verlängerung errichteten senkrechte Linien die in das Unendliche verlängerte c d nicht schneiden, und daher mit ihr parallel laufen, welcher Punkt t daher der Grenzpunkt heissen mag, so mache man (Fig. 1) AP = ct (Fig. 2), so liegt der Punkt P zwischen K und C auf der CK, denn ct ist nach der Annahme kleiner als ca, oder als CA (F. 1) und da AP = ct ist, so ist AP kleiner als AC, also liegt P zwischen A und C. Es ist aber ct größer als ch, und AK = ch, folglich AP größer als AK, daher liegt P zwischen K und C. Also liegen alle Anfangspunkte derjenigen geraden Linien, die mit einem gegen A gekehrten spitzigen Winkel

= ACD = Q von der AC ausgehen, und AB oder ihre Verlängerung schneiden, von A gegen P, zwischen A und P, und alle Anfangspunkte derjenigen geraden Linien, die gleichfalls mit einem gegen A gekehrten Winkel = Q von AC ausgehen, und die verlängerte AB nicht schneiden, von dem unendlich entfernten Punkt X an, auf der XP von X gegen P zu. Man mache hierauf von dem Grenzpunkt P aus, PV = PK, halbire PV und PK in w und u (1 B. 10 S. Euklid), ihre Hälften Pw und Pu wiederum in m und n u. s. f. in das Unendliche, und setze an die Theilungspunkte w, m, n, u u. s. f. gerade Linien, die mit AC gegen AB gekehrte Winkel, jeden = Q machen (1 B. 23 S. Euklid), nemlich wα. uβ, mγ, nδ u. s. f. so werden ihre auf PV und PK liegenden Anfangspunkte w, m u. s. f. u, n u. s. f. sich dem Grenzpunkte P immer mehr nähern, aber ihn nicht erreichen. Denn gesetzt, es geschehe dieses bei einer, so wäre ihr Anfangspunkt ein solcher Theilungspunkt der PV oder der PK, der im Punkt P selbst läge, also der zugehörige Theil = Null, und könnte daher nicht mehr halbirt werden, folglich wäre die Linie PV oder PK nicht in das Unendliche theilbar, welches ungereimt ist.

Nun setze man an den Punkt P der AC einen gegen A gekehrten Winkel APQ = ACD (1 B. 23 S. Euklid), dessen von der AC ausgehender Schenkel PQ die Grenzlinie heissen mag. Dieser nähern sich die geraden Linien wα, mγ u. s. f. so wie uβ, nδ u. s. f.; aber weder die eine Reihe von diesen Linien, noch die andere, können sie je erreichen. Denn geschähe dieses bei einer dieser Linien, so läge ihr in der CK befindlicher Anfangspunkt im Grenzpunkt P, welches gegen das Erwiesene ist.

Ferner haben die schneidenden und die nicht schneidenden Linien die nemliche Grenzlinie. Denn gesetzt, sie hätten zwei verschiedene Grenzlinien, die von den Punkten P und p der CP ausgiengen, z. B. PQ und pq; so würden alle aus den zwischen P und q der Pq befindlichen Punkten unter dem gegen AB gekehrten Winkel Q ausgehenden geraden Linien weder die AB schneiden, noch sie nicht schneiden. Denn schneiden sie AB, so ist PQ nicht die Grenzlinie der schneidenden Linien, und schneiden sie AB nicht, so ist pq nicht die Grenzlinie der nicht schneidenden Linien. Aber da es unmöglich ist, daß diese geraden Linien die AB zugleich schneiden und nicht

schneiden, so giebt es keine zwei verschiedenen Grenzlinien, sondern PQ ist die einzige.

Nun kann diese Linie PQ aber selbst keine die AB schneidende Linie seyn, denn es wäre sodann eben so, als wenn eine von den die AB schneidenden Linien im Punkt P eingetroffen wäre, welches gegen das Erwiesene ist. Sie kann aber auch keine die AB nicht schneidende Linie seyn; denn es wäre ebensoviel, als wenn eine von den die AB nicht schneidenden Linien im Punkt P eingetroffen wäre, welches gleichfalls gegen das Erwiesene ist. Da PQ aber doch entweder eine die AB schneidende oder sie nicht schneidende Linie seyn muß, und keine andere von diesen verschiedene Lage der PQ gegen AB denkbar ist, so ist die gerade Linie PQ als Grenzlinie unmöglich, und folglich giebt es auch keinen Grenzpunkt, also auch keine Grenze für die die AB schneidenden und sie nicht schneidenden Linien, das heißt: entweder gehen die schneidenden Linien nach X zu, oder die nicht schneidenden nach A zu in das Unbegrenzte fort, da sie zugleich nicht statt finden können, indem die unbegrenzte Reihe der einen Art Linien, die in entgegengesetzter Richtung fortschreitende Reihe Linien der andern Art aufhebt.

Es kommt also darauf an, von welcher Art dieser Linien die reale Möglichkeit erwiesen ist. Dieses findet nun bei den die AB schneidenden Linien statt, deren Realität durch die Construction der KL gezeigt worden ist. Folglich geht allein die Reihe der unter dem Winkel Q von AX ausgehenden und die AB schneidenden geraden Linien in das Unbegrenzte nach der Gegend X zu fort, und dadurch werden die unter dem Winkel Q von AX ausgehenden und die AB nicht schneidenden Linien unmöglich.

Also schneidet die gleichfalls unter dem gegen AB gekehrten Winkel Q von AX ausgehende CD hinlänglich verlängert die verlängerte AB, und zwar nach der Gegend B zu, nach welcher zu der spitzige Winkel ACD = Q liegt, weil die senkrechte gh (Fig. 2) vor dem spitzigen Winkel acd liegt, und acd = ACD (Fig. 1) ist.

Anmerkung.

Um diesen Beweis zu erläutern, sei (Fig. 1) AE = AK und AF = AL, und man ziehe EF, so ist AEF = AKL. Man halbire nun AK und

AE, diese Hälften wiederum u. s. f. und ziehe aus den Halbirungspunkten die geraden Linien RS, GT, u. s. f. alle unter einem Winkel = AKL, so haben KL, RS u. s. f. jede einen Punkt K, R u. s. f. mit AC und einen andern von dem vorigen verschiedenen Punkt L, S u. s. f. mit AB gemeinschäftlich, und liegen über A, aber EF, GT u. s. f. haben jede einen Punkt E, G u. s. f. mit der rückwärts verlängerten AC, und einen andern, von diesem verschiedenen Punkt F. T u. s. f. mit der rückwärts verlängerten AB gemeinschäftlich, und liegen unter A. Nun ist der Punkt A der Grenzpunkt dieser beiden Arten Linien, indem durch fortgesetztes Halbiren der AK und AE die Punkte R u. s. f. so wie die Punkte G und die folgenden demselben immer mehr genähert werden, ohne ihn jedoch zu erreichen, und eben so die Linien RS, GT u. s. f. der von A unter dem Winkel OAW = AKL ausgehenden Grenzlinie HW, ohne sie zu erreichen. Diese Grenzlinie HW kann nun weder das Eigene der Linien KL, RS u. s. f. noch der Linien EF, GT u. s. f. haben; denn sonst wäre es eben so viel, als wenn durch fortgesetztes Halbiren die Grenzlinie HW durch die genannten Linien erreicht worden wäre,

welches doch unmöglich ist. Also kann die Grenzlinie HW weder mit AC und AB, noch mit AO und AF, d. h. den rückwärts verlängerten AC und AB zwei von einander verschiedene Punkte gemeinschäftlich haben. Soll also HW als Grenzlinie gedacht werden können, so muß ein Drittes für sie statt finden, und dieses ist: daß sie nur einen einzigen Punkt A mit den genannten Linien AC und AB, so wie mit AO und AF gemeinschäftlich haben kann. Dieses ist aber bei der Lage der zwei in einerlei Ebene befindlichen geraden Linien PQ und AB nicht der Fall, denn diese sind nur entweder parallel oder nicht parallel, das heißt: entweder sie schneiden sich, oder sie schneiden sich nicht, ein Drittes ist nicht denkbar.

Zweiter Satz.

Lehrsatz. (Fig. 3.)

Wenn zwei gerade Linien AB und CD parallel sind, und eine gerade Linie EF auf der einen AB senkrecht ist, so ist sie auch auf der andern CD senkrecht.

Beweis.

Gesetzt, EF sey nicht senkrecht auf CD, so sind die Nebenwinkel x und y schiefe Winkel, nemlich der eine spitzig, der andere stumpf. Daher treffen AB und CD hinlänglich verlängert nach der Gegend zusammen, nach welcher der spitzige Winkel liegt. (Erster Satz.) Folglich sind sie nicht parallel. Dieses widerspricht aber der Voraussetzung.

Dritter Satz.

Lehrsatz. (Fig. 4.)

Wenn zwei gerade, in einerlei Ebene befindliche gerade Linien AB und CD (Fig. 18) von einer dritten EF so geschnitten werden, daß die Summe der beiden innern Winkel DGK und y kleiner als zwei rechte Winkel ist; so treffen sie, hinlänglich verlängert, nach derjenigen Gegend zusammen, nach der die beiden genannten Winkel liegen.

Beweis.

Erster Fall. Es sey der eine innere Winkel ein rechter, und folglich der andere Winkel spitzig, so treffen AB und CD (nach dem ersten Lehrsatz) verlängert zusammen.

Zweiter Fall. Es seyen beide innere Winkel schiefe Winkel. Sind sie ungleich, so mache man an der Spitze des größern Winkels DGK folgende Construction. Man ziehe aus der Spitze G auf AB die senkrechte GJ, und mache den Winkel x = dem Winkel y, so ist GH mit AB parallel (28 S. E.), und GJ auch senkrecht auf der mit AB parallelen GH (zweiter Satz), also JGH ein rechter Winkel.

Ferner ist DGK + y kleiner als 2 R (nach der Voraussetzung), und DGK + DGE = 2 R (als Nebenwinkel), also ist DGK + y kleiner als DGK + DGE. Daher y kleiner als DGE, d. i. DGE größer als y. Es ist aber x = y (nach der Construction), folglich DGE auch größer als x. Also liegt GD zwischen GH und GK. Nun liegt die senkrechte GJ vor dem spitzigen Winkel y (17 S. E.), folglich fällt GD entweder zwischen GK und GJ, oder in GJ (in welchen beiden Fällen klar ist, daß GD verlängert mit KJ zusammentreffen muß), oder GD fällt zwischen GJ und GH. Findet dieser letzte Fall statt, so ist z kleiner als JGH (und da JGH = R), so ist z kleiner als R.

Folglich ist z ein spitziger Winkel, und da u ein rechter ist, so treffen AB und CD hinlänglich verlängert nach der Gegend B zusammen. (Erster Lehrsatz.)

Anmerkung.

Auf diese Art ist also der sogenannte eilfte Grundsatz Euklid's so strenge bewiesen, als irgend ein anderer geometrischer Lehrsatz. Nun folgt unmittelbar sogleich der neun und zwanzigste Satz des ersten Buchs der Elemente Euklid's, oder der sechs und zwanzigste Satz bis zu Ende der ausführlichen evidenten Theorie der Parallellinien, Seite 49 — 63. Folgende Sätze derselben aber sind, wenn man die gegenwärtige Theorie einschalten will, dagegen als überflüssig wegzulassen. Nemlich: 4 Satz (25 Seite), 6 Satz (26 Seite), 18 Satz (34 Seite), 22 Satz (42 Seite), 23 Satz (44 Seite), 24 Satz (46 Seite), 25 Satz (47 Seite).

II.

Ausser dem vorhergehenden Beitrag zur Theorie der Parallellinien, liefere ich hier noch einen andern, der einen Beweis des Satzes: daß, wenn ein Viereck drei rechte Winkel hat, der vierte Winkel desselben auch ein rechter ist, enthält. Dieser Beweis ist hier vermittelst der neuern Exhaustions-Methode direct geführt, und unabhängig von dem neun und zwanzigsten Satz des ersten Buchs Euklid's.

Erster Hülfssatz. (Fig. 5.)

Wenn es ein Viereck ABCD mit vier rechten Winkeln giebt, so sind die gegenüberstehenden Seiten gleich, nemlich BC = AD, und CD = AB.

Beweis.

Man halbire AB in E (1 B. 9 S. Euklid), und errichte aus dem Punkt E auf AB die senkrechte EF (1 B. 11 S. Euklid), so wird diese die CD in einem Punkt F, der zwischen C und D liegt, treffen, da bei A, E und B rechte Winkel sind, und daher EF mit AD und BC parallel ist (1 B. 28 S. Euklid). Hierauf ziehe man AF und BF.

Da BE = AE, EF = FE, und m = n = R, so sind die beiden Dreiecke AFE und BFE congruent (1 B. 4 S. Euklid), also BF = AF, und y = x. Da nun auch y + w = x + z, als rechte Winkel, so ist w = z, und da überdieß bei C und D rechte Winkel sind, so ist das Dreieck CBF congruent mit dem Dreieck DAF (1 B. 26 S. Euklid), daher BC = AD. Eben so wird bewiesen, daß CD = AB ist, wenn man AD halbirt, und aus dem Halbirungspunkt eine senkrechte auf ihr errichtet, u. s. f.

Zweiter Hülfssatz. (Fig. 6.)

Wenn in zwei Vierecken ABCD und EFGH die Grundlinie EF der Grundlinie AB, ferner die Seite FG der Seite BC und die Seite EH der Seite AD gleich ist, auch die beiden Winkel an der Grundlinie in jedem dieser zwei Vierecke rechte Winkel sind, so sind die beiden Vierecke congruent.

Beweis.

Man ziehe die ähnlich liegenden Diagonalen BD und FH. Da EF = AB, EH = AD ist, und die rechten Winkel E und A gleich sind, so sind

die beiden Dreiecke FEH und BAD congruent (1 B. 4 S. Euklid), also $FH = BD$, $m = x$ und $n = y$, und da $n + p = y + z = R$, so ist $p = z$, und da noch $FG = BC$, so sind die Dreiecke FGH und BCD congruent (1 B. 4 S. Euklid), also $GH = CD$, $k = u$, und $FGH = BCD$. Auch ist $m + k = x + u$, d. i. $EHG = ADC$. Folglich sind die acht Stücke des einen Vierecks der acht in der nemlichen Ordnung folgenden Stücken des andern Vierecks gleich, daher die beiden Vierecke congruent.

Dritter Satz.

Lehrsatz. (Fig. 7.)

In einem Viereck ABCD, welches drei rechte Winkel ABC, BAD und ADC hat, ist der vierte Winkel BCD auch ein rechter Winkel.

Beweis.

Man verlängere CB über B hinaus, und setze an den Punkt B einen spitzigen Winkel NBM, welchen man dem rechten Winkel ABN an Größe so nahe annehmen kann, als man will, so daß der Winkel ABM als der Unterschied des spitzigen Win-

kels NBM vom rechten Winkel kleiner seyn kann, als irgend ein gegebener Winkel, so klein dieser auch seyn mag.

Hierauf nehme man auf BM einen beliebigen Punkt M, und fälle aus ihm auf BW die senkrechte MN. Diese muß vor dem spitzigen Winkel WBM liegen, weil ausserdem ein rechtwinkliches Dreieck entstehen würde, von dem die Summe zweier Winkel, des rechten und stumpfen größer wäre, als zwei rechte Winkel, welches unmöglich ist (1 B. 17 S. Euklid). Ist BN größer als BC oder = BC, so theile man BC in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, wovon einer BE seyn mag, mache BQ = BE, und errichte aus Q auf BN die senkrechte QP, welche die BM in einem zwischen B und M liegenden Punkt P schneiden wird, da bei Q und N rechte Winkel sind, und daher QP mit NM nicht zusammentrift (1 B. 28 S. Euklid). Ist aber BN kleiner als BC, so halbire man BC in F, darauf halbire man wiederum die Hälfte BF in E, und fahre mit dem Halbiren so fort, bis man auf einen Theil, z. B. BE kommt, der gleich BN oder kleiner als BN ist. Ist BE = BN, so wendet

man bei der folgenden Construction das Dreieck BNM an. Ist aber BE kleiner als BN, so mache man BQ = BE, und errichte aus Q auf BN die senkrechte QP, welche BM zwischen B und M schneiden wird, wie eben gezeigt worden ist. Hierauf mache man BT = QP, und ziehe ET, so ist das Dreieck EBT congruent mit dem Dreieck BQP, (1 B. 4 S. Euklid). Also ist der Winkel BET = dem Winkel NBM. Hierauf fälle man aus dem Punkt E auf AD die senkrechte EH, welche die AD zwischen A und D trift, weil bei A, H und D rechte Winkel sind, also EH mit AB und CD parallel ist. Auch kann EH nicht in ET oder zwischen ET und BA liegen, da ET mit BA oder deren Verlängerung zusammentrift, also EH auch mit BA oder ihrer Verlängerung zusammentreffen würde, welches unmöglich ist, da bei H und A rechte Winkel sind, also EH mit BA parallel ist.

Man setze nun an E den rechten Winkel BEL, so liegt EH entweder zwischen ET und EL, oder in EL selbst, oder über EL, wie z. B. ER. Liegt EH in EL, so ist BEH = BEL, nemlich ein rechter Winkel. Liegt aber EH zwischen ET und EL, so ist BEH dem rechten Winkel näher als der

Winkel BET oder NBM. Nun kann aber NBM dem rechten Winkel so nahe angenommen werden, daß dessen Unterschied d vom rechten kleiner ist, als jeder gegebene Winkel a, so klein er auch seyn mag; da aber der Unterschied δ des Winkels BEH vom rechten noch weniger beträgt, als der Unterschied d, so ist der Unterschied δ um so mehr kleiner, als der Winkel a, das heißt: der Unterschied δ ist so klein, daß er sich nicht angeben läßt. Folglich ist die Größe des Winkels BEH der Größe eines rechten so nahe, daß sein Unterschied vom rechten sich nicht angeben läßt, oder der Winkel BEH ist vom rechten Winkel nicht zu unterscheiden, und daher selbst ein rechter Winkel. Liegt endlich EH über EL, wie ER, so ist der Winkel LER kleiner als LET. Denn wenn man BS = BT macht, und ES zieht, so sind die Dreiecke EBS und EBT congruent, also BES = BET, und wenn man LE rückwärts nach V, und RE nach Z verlängert, so ist BEV ein rechter Winkel, daher VES = LET. Ist nun LER = LET, so ist er auch = VES, also liegt EZ in ES, und schneidet daher die verlängerte AB in S, welches unmöglich ist, da bei R und A rechte Winkel,

und daher RE und AB parallel sind. Ist endlich LER größer als LET, so ist er auch größer als VES, daher liegt EZ zwischen ES und EB, und schneidet BS oder die verlängerte AB wiederum, welches unmöglich ist. Da also LER nicht = LET und auch nicht größer seyn kann, so ist er kleiner als LET, das heißt: der Unterschied des Winkels BER vom rechten BEL beträgt wiederum weniger, als der Unterschied LET oder d des Winkels BET oder NBM vom rechten Winkel.

Daher ist, wie vorhin gezeigt worden, auch der Winkel BER vom rechten Winkel an Größe nicht zu unterscheiden, und also dem rechten Winkel gleich. Folglich fällt EH und ER in EL, und EL schneidet also verlängert die AD, dieses sey im Punkt X. Das Viereck ABEX hat daher vier rechte Winkel, folglich sind die gegenüberstehenden Seiten gleich (erster Hülfssatz), nemlich AX = BE, und EX = AB. Man trage hierauf AX so vielmal auf AD auf, so vielmal BE in BC enthalten ist, so daß die Theilungspunkte von R nach D zu J, K u. s. f. seyen, so trift der letzte Punkt G entweder in D ein oder nicht. Ferner ziehe man FJ, u. s. f. bis CG. Das erste Viereck EXJF ist nun mit

dem Viereck ABEX congruent (zweiter Hülfssatz), denn es ist EF = BE, JX = AX, und bei X und E sind rechte Winkel, daher ist XJF = AXE = R und EFJ = BEX = R. Folglich sind in dem folgenden Viereck auch FJG und JFC rechte Winkel, und da FC = EF und JG = XJ ist, so ist wiederum das Viereck JFCG congruent mit dem vorhergehenden Viereck. Auf diese Art sind auch alle folgenden Vierecke congruent und Rechtecke. Gesetzt nun, JFCG sey das letzte dieser Vierecke, so sind in demselben auch die vier Winkel rechte, also GCF und CGJ rechte Winkel. Liegt nun der Punkt G nicht im Punkt D, so entsteht ein Dreieck DCG mit zwei rechten Winkeln bei G und D. Da aber ein solches Dreieck unmöglich ist, so liegt CG in CD, daher ist der Winkel FCD = FCG. Aber FCG ist ein rechter Winkel, nach dem Erwiesenen, also ist auch FCD, das ist: BCD ein rechter Winkel.

Anmerkung.

Dieser Beweis ist in der ausführlichen evidenten Theorie der Parallellinien, Seite 72 nur indirect oder apagogisch geführt worden.

Neuer Beitrag
zu den
Beweisen des Pythagoräischen Lehrsatzes.

Erste Art des Beweises.

Lehrsatz. (Fig. 9)

In jedem rechtwinklichen Dreieck ABC ist das Quadrat der Hypotenuse AC der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich.

Beweis.

Auf den beiden Katheten AB und BC des gegebenen bei B rechtwinklichen Dreiecks ABC beschreibe man die gegen die Hypotenuse AC zu liegenden beiden Quadrate BCDE und ABFG, ver-

längere die Seite FG des kleinern Kathetenquadrates über G, mache GM = der größern Kathete BC, und ziehe AM, so ist das bei G rechtwinkliche Dreieck AGM (da auch AG = AB ist,) congruent mit dem Dreieck ABC, und daher AM = AC, W = Z und x = y, folglich (wenn man den gemeinschäftlichen Winkel CAG hinzusetzt,) CAM = BAG = R. Man ziehe MK parallel mit AC, und CK parallel mit AM, so ist das Viereck ACKM ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel und zwei gleichen anliegenden Seiten AM und AC, daher sind auch die übrigen drei Winkel rechte Winkel und die vier Seiten gleich, also ist es ein Quadrat, und zwar das Quadrat der Hypotenuse AC.

Hierauf ziehe man aus dem Punkt B durch den Punkt O die BP, so besteht das Hypotenusenquadrat ACKM aus den beiden Vierecken ANPM und CNPK, es ist also zu beweisen, daß das Q. ABFG = Viereck ANPM, und das Q. BCED = Viereck CNPK ist.

Man ziehe aus K zum Punkt O die KO, so liegt DO und KO in einer einzigen geraden Linie. Denn

da CE und FO parallel sind, (weil bei C und F rechte Winkel sind,) so ist DOF = DEC = R. Es ist aber GM = BC (nach der Construction), also = BD, und da im Rechteck BDOF die gegenüberstehenden Seiten BD und FO gleich sind, so ist GM = FO. Wenn man nun die gemeinschäftliche Linie GO wegnimmt, so ist OM = FG = AB, es ist aber auch MK = AC, und da w = z war, und z + y = R ist, so ist (da w + KMO = dem Winkel eines Quadrats, also auch = R,) KMO = y, daher das Dreieck KOM congruent mit dem Dreieck ABC, folglich MOK = R, also auch KOF = R, und da auch DOF = R war, so liegt KO mit DO in einer geraden Linie, auch ist KO parallel mit CF (wegen der rechten Winkel bei O und F), das ist: mit BC, und endlich ist KO = BC. (Wegen der Congruenz der Dreiecke KOM und ABC.)

Da nun KO gleich und parallel der BC ist, so sind in dem Viereck BCKO auch BO und CK gleich und parallel. Folglich ist auch NP mit CK parallel, und daher senkrecht auf AC und KM, also sind die Vierecke CNPK und ANPM Recht-

ecke, die Vierecke BCKO und ABOM aber schiefwinkliche Parallelogramme.

Nun ist das Q. BCED = P. BCKO (welches mit dem Quadrat auf der nemlichen Grundlinie BC und zwischen einerlei Parallelen BC und DK steht), = dem Rechteck CNPK. Eben so ist das Q. ABFG = P. ABOM = Rechteck ANPM. Also Q. BCED + Q. ABFG = Rechteck CNPK + Rechteck ANPM, d. i. = Quadrat ACKM.

Anmerkung.

Diese Beweisart hat Jetze in seiner Dissertatio academica, Halae 1752, als die achte Demonstration des pythag. Lehrsatzes aufgestellt.

Zweite Art des Beweises.

(Fig. 11)

Das bei A rechtwinkliche Dreieck ABC sei das gegebene Dreieck. Man beschreibe auf den beiden Katheten AB und AC die Quadrate ABFG und ACDE, so wie auf der Hypotenuse BC das Quadrat BCHJ. Es ist zu beweisen, daß Quadrat ACDE + Q. ABFG = Q. BCHJ.

Beweis.

Man verlängere FG über G, und DE über E hinaus, bis beide Verlängerungen sich schneiden, dieses sey im Punkt P. Eben so verlängere man FB über B und DC über C hinaus, bis beide Verlängerungen sich schneiden, dieses geschehe im Punkt N. Die Linien BA und AE liegen in einer geraden Linie, da BAC und CAE rechte Winkel sind, eben so: CA und AG.

In dem Viereck FGCN sind drei rechte Winkel bei C, F und G, also ist es ein rechtwinkliches Parallelogramm, und $FN = GC = CA + AB$, ferner $CN = FG = AB$. Eben so ist das Viereck FPEB ein rechtwinkliches Parallelogramm (da bei B, F und E rechte Winkel sind), also ist $GPE = R$, auch ist $FP = BE = BA + AE = AB + CA$, und $PE = BF = AB$. Also $DP = PE + ED = AB + ED = AB + CA$. Eben so ist $DN = DC + CN = CA + AB$. Also hat das Viereck FPDN vier gleiche Seiten und vier rechte Winkel, folglich ist es ein Quadrat, dessen Seite $= AB + AC$ ist.

Dieses Quadrat besteht aber aus vier Theilen, diese sind: 1) das Quadrat der Kathete AC, 2) das Quadrat der Kathete AB, 3) das Rechteck BACN, dessen anliegende Seiten die Katheten AB und AC sind, und 4) das Rechteck AEPG, dessen anliegende Seiten AG und AE, oder auch AB und AC sind, da AG = AB und AE = AC ist.

Nun verlängere man AC über C, und mache CK = AB, ziehe KH, verlängere sie und mache HL auch = AB, hierauf ziehe man LJ, und verlängere sie über J hinaus, mache JM auch = AB, und ziehe BM.

Da ACD = R, so ist auch NCK = R, und da BCH auch = R, so ist BCH = NCK, wenn man also den gemeinschäftlichen Winkel HCN wegnimmt, so ist HCK oder Z = BCN, d. i. = ABC, und da überdieß CK = AB, und CH = BC ist, so ist das Dreieck CKH congruent mit dem Dreieck ABC, also x = R, y = ACB, und KH = AC, also KL (oder HK + HL) = AC + AB.

Da w + t + y = 2 R, und t = R ist, so ist w + y auch = R, und da z + y gleichfalls = R

ist, so ist $w + y = z + y$, also $w = z$, und da ferner $HL = AB$, und $HJ = BC$ ist, und $w = z = ABC$, so ist das Dreieck HJL congruent mit dem Dreieck ABC, also $JLH = R$, $JL = CA$, und $m = ACB$. Auch ist $LM = LJ + JM = AC + AB$.

Da $p = R$, und $m + w$ auch $= R$, so läßt sich wie eben zeigen, daß $q = w = z = ABC$ ist, und da $JM = AB$, und $BJ = BC$, so ist das Dreieck BMJ congruent mit dem Dreieck ABC, also $u = R$, $MB = AC$, und $JBM = ACB$. Da nun $ACB + ABC = R$, so ist $JBM + ABC$ auch $= R$, und da ferner $CBJ = R$, so ist $JBM + CBJ + ABC = 2R$, folglich AB und BM in einer geraden Linie.

Also hat das Viereck AKLM vier gleiche Seiten und vier rechte Winkel, folglich ist es ein Quadrat, und dessen Seite $AB + AC$ ist, so ist es mit dem Quadrat FPDN congruent, also auch gleich.

Nun besteht aber das Quadrat AKLM, 1) aus dem Quadrat der Hypotenuse BC, und 2) aus vier congruenten Dreiecken, wovon jedes auch mit dem Dreieck ABC congruent ist.

Die

Die zwei Rechtecke BACN und AEPG bestehen aber auch aus vier Dreiecken, wovon jedes mit dem Dreieck ABC congruent ist, also sind die vier Dreiecke des Quadrats AKLM zusammen, den beiden genannten Rechtecken zusammen gleich. Da nun das Quadrat BCHJ der Hypotenuse übrig bleibt, wenn man die vier Dreiecke des Quadrats AKLM wegnimmt, und die beiden Kathetenquadrate übrig bleiben, wenn man die beiden Rechtecke des Quadrats FPDN wegnimmt, so ist das Quadrat der Hypotenuse den beiden Kathetenquadraten zusammen gleich.

Dritte Art des Beweises.

(Fig. 13)

In dem bei C rechtwinklichen Dreieck ABC ist das Quadrat der Hypotenuse AB der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich.

Beweis.

Man ziehe aus der Spitze C des rechtwinklichen Dreiecks ABC auf die Hypotenuse AB die senkrechte CD. Hierauf mache man AE = BC, AF = CD, und ziehe EF, so ist das Dreieck AEF

mit dem Dreieck CBD congruent (da auch x = y ist), also ist AFE ein rechter Winkel, und EF = BD. Man beschreibe das Rechteck ACBG, und errichte aus E die auf AC senkrechte EH, die BG in H schneidet. Ferner ziehe man durch E die JK parallel mit der Hypotenuse AB, mache EK = BF, EJ = FA, und ziehe BK und AJ, so ist ABKJ ein Rechteck, hierauf ziehe man BE. Das Dreieck AEB ist die Hälfte des Rechtecks AEHG, mit dem es auf der nemlichen Grundlinie AE und zwischen einerlei Parallelen EA und BG steht.

Dieses Dreieck AEB ist aber auch die Hälfte des Rechtecks ABKJ, mit dem es auf der nemlichen Grundlinie AB und zwischen einerlei Parallelen AB und JK steht. Also ist das Rechteck AEHG dem Rechteck ABKJ gleich, d. h. das Rechteck aus AE und AG ist dem Rechteck aus AB und AJ gleich. Es ist aber AE = BC (nach der Construction), und AG auch = BC, (als gegenüberstehende Seiten), also ist das Rechteck AEGH = dem Quadrat der kleinern Kathete BC, und dieses ist folglich dem Rechteck aus AB und AJ gleich.

Es ist aber AJ = EF = BD, und AB die Hypotenuse, folglich ist das Quadrat der kleinern Kathete dem Rechteck aus der Hypotenuse, und dem von der senkrechten CD abgeschnittenen kleinern Theil BD der Hypotenuse gleich.

Hierauf verlängere man BC, mache Bd = AC, Ba = CD, und ziehe ad, so ist (da überdieß aBd = ACD) ad = AD, z = x, und da auf AB senkrecht. Man errichte aus d auf Bd eine senkrechte Linie, und verlängere sie, bis sie die gleichfalls verlängerte GA im Punkt f schneidet, so ist BdfG ein Rechteck. Hierauf ziehe man durch d die gh parallel mit AB, und verlängere BK und AJ, bis sie die Parallele in g und h treffen, so ist ABgh auch ein Rechteck. Endlich ziehe man Ad. Das Dreieck BAd ist die Hälfte des Rechtecks BdfG, so wie des Rechtecks ABgh. Also ist das R. BdfG = dem R. ABgh. Es ist aber Bd = AC (nach der Construction), und BG auch = AC (als gegenüberstehende Seite im Rechteck ACBG), also ist das Rechteck BdfG das Quadrat der größern Kathete AC. Ferner ist im Rechteck ABgh die Seite gh = der Hypotenuse AB, und

die anliegende Seite gB = da = AD, welches der größere Abschnitt der Hypotenuse ist. Folglich ist das Quadrat der größern Kathete AC dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem größern Abschnitt AD gleich.

Endlich verlängere man Bg und Ah, mache hL = gM = BD, und ziehe LM. Da Bg = ad = AD, und gM = BD ist, so ist Bg + gM = AD + DB, oder BM = der Hypotenuse AB. Da nun ferner AL = BM, und BAL so wie ABM rechte Winkel sind, so ist leicht zu zeigen, daß ABML das Quadrat der Hypotenuse AB ist. Dieses Quadrat besteht aber aus dem Rechteck ABgh (d. i. dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem größern Abschnitt AD derselben), und aus dem Rechteck LMgh, dessen anliegende Seiten LM und Mg der Hypotenuse AB und dem kleinern Abschnitt BD gleich sind, folglich ist das Quadrat ABML der Hypotenuse AB der Summe der Quadrate AEHG und BdfG der beiden Katheten gleich.

Anmerkung.

Diesen Beweis habe ich aus Grůson's Satz: In zwei rechtwinklichen Dreiecken, in welchen ein

spitziger Winkel des einen Dreiecks einem spitzigen Winkel des andern gleich ist, ist das Rechteck aus der Hypotenuse des ersten und der kleinern Kathete des zweiten Dreiecks, dem Rechteck aus der Hypotenuse des zweiten und der kleinern Kathete des ersten Dreiecks gleich, u. s. f. hergeleitet. Ueber diesen Satz befindet sich eine Abhandlung von Grüson in den Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften für 1814 bis 1815.

Vierte Art des Beweises.

(Fig. 12.)

In dem bei A rechtwinklichen Dreieck BAC ist das Quadrat der Hypotenuse BC der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich.

Beweis.

Man mache AG = AB, ziehe BF mit AG, und GF mit AB parallel, so ist das rechtwinkliche Parallelogramm ABFG das Quadrat der kleinern Kathete AB.

Auf der größern Kathete AC beschreibe man das Quadrat ACHJ. Hierauf errichte man auf BC

aus den Endpunkten B und C senkrechte Linien CD und BE, verlängere CD bis sie HJ in D trift, mache BE = CD, und ziehe DE, so sind in dem Viereck BCDE die gegenüberstehenden Seiten CD und BE parallel und gleich, also auch BC und DE parallel und gleich, folglich das Viereck BCDE ein rechtwinkliches Parallelogramm. Nun ist aber BCD = R, und ACH auch = R, wenn man also den gemeinschäftlichen Winkel y wegnimmt, so ist DCH = ACB, und da überdieß CH = CA, und CHD so wie BAC rechte Winkel sind, so ist das Dreieck CHD congruent mit dem Dreieck BCA, also x = ABC, DH = AB und CD = BC. Folglich ist das Rechteck BCDE das Quadrat der Hypotenuse BC. Da nun z = R, so liegt L zwischen J und A. Nun sind JDL + z + x = 2 R, also JDL + x = R, daher ist JDL ein spitziger Winkel, und dessen Scheitelwinkel HDK (wenn man ED über D verlängert,) auch spitzig, daher trift die verlängerte ED mit der verlängerten CH zusammen. Dieses sey im Punkt K, so entsteht das Dreieck DHK, welches mit dem Dreieck BFM congruent ist, denn bei H und F sind rechte Winkel, ferner ist KDC = z = R, das ist: HDK + x = R, folglich

(da x = ABC war,) HDK + ABC = R. Also ist HDK = R — ABC = ACB, und da FB parallel mit CA, so ist MBF = ACB, daher HDK = MBF. Endlich ist DH = AB, (nach dem vorher Erwiesenen,) also, da BF = AB ist, ist auch DH = BF. Eben so ist das Dreieck JDL congruent mit dem Dreieck GCM. Denn LDJ ist = HDK, (als Scheitelwinkel,) also = ACB oder = GCM, ferner sind bei J und G rechte Winkel, und endlich ist DJ = JH — DH, = AC — DH, (und da DH = AB war, und AG = AB ist,) = AC — AG = GC.

Ferner ist das Viereck BCKL ein Parallelogramm (da AJ mit CH, und ED mit BC parallel ist,) und dem Quadrat BCDE der Hypotenuse gleich, da es mit demselben auf der nemlichen Grundlinie BC und zwischen einerlei Parallelen BC und EK steht.

Kann man nun zeigen, daß dieses Parallelogramm BCKL den beiden Kathetenquadraten ABFG und ACHJ zusammen gleich ist, so ist auch das Quadrat der Hypotenuse ihnen zusammen gleich.

Das P. BCKL hat aber mit dem Q. ABFG das Viereck ABMG gemeinschäftlich, und mit dem Q. ACHJ das Viereck ACDL nebst dem Dreieck HCD. Uiberdieß hat es noch zwei eigene Stücke, nemlich das Dreieck DHK und das Dreieck GCM. Die beiden Kathetenquadrate haben nun auch zwei eigene Stücke, nemlich dem Q. ABFG ist das Dreieck BFM eigen, und dem Q. ACHJ das Dreieck JDL. Es ist aber bewiesen worden, daß die Dreiecke DHK und BFM congruent sind, so wie auch die Dreiecke GCM und JDL. Daher besteht das P. BCKL aus den nemlichen Stücken, wie die beiden Kathetenquadrate, es ist ihnen also gleich, folglich auch das Quadrat der Hypotenuse.

Fünfte Art des Beweises.

(Fig. 10)

Es sey ABC das gegebene bei B rechtwinkliche Dreieck. Man beschreibe die beiden Katheten-quadrate BCED und ABFG, verlängere ED, mache EH = AB und ziehe CH, so sind, da auch CE = BC, und E = B = R ist, die Dreiecke CEH und ABC congruent, also ist CH = AC, und ECH = ACB, ferner ist, da BCE = ECH

+ BCH, und ACH = ACB + BCH, auch ACH = BCE, und da BCE = R ist, so ist auch ACH = R. Hierauf errichte man aus A auf der Hypotenuse AC die senkrechte AJ, und ziehe HJ. Da nun CAJ = R, und BAG = R, so ist CAJ = BAG, und daher GAJ = BAC. Da ferner die Dreiecke AGJ und ABC congruent sind, (weil AG = AB, G = B = R, und GAJ = BAC ist,) so ist AJ = AC, also = CH, daher ACHJ ein Quadrat. Man ziehe aus H die HM parallel mit DB, so entstehen bei M rechte Winkel; ferner durch L die OLN parallel mit BC, so sind auch bei O rechte Winkel, und nun kann man leicht zeigen, daß die Dreiecke JFK und HLO congruent sind. Denn es ist JFK = R, und HOL = R, also JFK = HOL, ferner ist FKJ = HKM, als Scheitelwinkel, aber im Dreieck HMK ist HKM = R — KHM, und LHO ist = CHJ — KHM, das ist: auch = R — KHM, also ist HKM = LHO, folglich FKJ = LHO, endlich ist LO = DH = EH — DE = AB — BC, und FJ = FG — GJ = AB — BC, also ist FJ = LO. Ausserdem sind die Parallelogramme LDEN und LBMO gleich, (1 B. 43 S.

Euklid,) da sie in dem Parallelogramm CEHM die Ergänzungen der beiden Diagonalen-Parallelogramme HDLO und CBLN sind, und endlich sind die beiden Dreiecke CNL und KMH congruent, denn es ist HM = BD = DE = LN, ferner M = R, N = R, also M = N, und da KHM = CHJ — CHM = R — CHM, und CHE = EHM — CHM = R — CHM ist, so ist KHM = CHE, endlich, da ON mit HE parallel ist, ist der äussere Winkel CLN dem gegenüberstehenden innern Winkel CHE gleich, folglich ist auch KHM = CLN.

Die Theile des Quadrats ACHJ der Hypotenuse sind also 1) Dreieck ABC + Dreieck OLH + Viereck BAJK, (das ist eben so viel als: Dreieck AGJ + Dreieck JFK + Viereck BAJK, aus welchen drei Stücken das eine Kathetenquadrat ABFG besteht,) 2) Dreieck BLC + Dreieck KHM + Parallelogramm MBLO, (das ist eben so viel als Dreieck BLC + Dreieck CNL + Parallelogramm DENL, aus welchen drei Stücken das zweite Kathetenquadrat BCED besteht,) folglich ist das Quadrat ACHJ der Hypotenuse den beiden Kathetenquadraten ABFG und BCED zusammen gleich.

Anmerkung.

Dieser Beweis ist von Coëtsius. Siehe dessen: Euclidis elementorum sex libri priores, Lugd, Bat. 1692, Seite 158.

Sechste Art des Beweises.

(Fig 8)

Es sey ABC das bei B rechtwinkliche Dreieck. Man beschreibe auf dessen Hypotenuse AC das Quadrat ACHJ, und aus C mit der Hypotenuse AC als Halbmesser einen Kreis. Hierauf verlängere man BC nach L und M, so ist LCM ein Durchmesser. Ferner ist BL = CL — BC = AC — BC, und BM = CM + BC = AC + BC. Man mache CE = BC, und beschreibe auf CE das Quadrat CDFE, welches dem Quadrat der Kathete BC gleich ist. Man verlängere CD bis H, so ist DH = CH — CD = AC — BC, und eben so AE = AC — BC. Man verlängere auch EF bis sie HJ in G trift, so ist EG = CH = AC, und GJ = AE = AC — BC = DH. Endlich verlängere man EG und AJ, und mache JN = GK = GH, so ist JN und GK = EC = BC, so-

dann ziehe man KN. Nun ist das Viereck GJNK ein Rechteck, welches dem Rechteck DFGH gleich ist, da GJ = DH = FG, und GK = GH ist. Also ist das Quadrat ACHJ der Hypotenuse gleich dem Kathetenquadrat CDFE + Rechteck DFGH + Rechteck AEGJ, oder gleich dem Quadrat CDFE + Rechteck AEKN. Die anliegenden Seiten AE und AN dieses Rechtecks sind aber = AC — BC und AJ + JN oder AC + BC. Folglich ist das Quadrat ACHJ der Hypotenuse gleich dem Quadrat der kleinern Kathete CDFE nebst einem Rechteck, von dessen anliegenden Seiten die kleinere dem Unterschied der Hypotenuse und dieser Kathete, und die größere Seite der Summe der Hypotenuse und dieser Kathete gleich ist.

Wenn man hierauf zum Kreisumfang LA und MA zieht, so ist LAM ein rechter Winkel, da er im Halbkreis steht, und daher sind die rechtwinklichen Dreiecke AB'L und ABM ähnlich, folglich verhält sich LB : BA = BA : BM, das ist: CL — BC : BA = BA : CM + BC, oder (da CL = CM = AC ist,) es verhält sich: AC — BC : AB = AB : AC + BC, daher ist (AB)q

$= (AC - BC) \times (AC + BC)$. Das heißt: das Rechteck, von dessen anliegenden Seiten die eine dem Unterschied der Hypotenuse AC und der kleinern Kathete BC, und die andere Seite der Summe dieser Linien gleich ist, ist dem Quadrat der größern Kathete AB gleich. Ein solches Rechteck ist aber das Rechteck AEKN, folglich ist das Quadrat der Hypotenuse AC der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich.

Anmerkung.

Dieser Beweis ist von Joh. Joachim Lange, ehemaligen Professor der Mathem. zu Halle, und ist in der vorher genannten Dissertation von Jetze bekannt gemacht worden.

Siebente Art des Beweises.

(Fig. 14)

Es sei ABC das gegebene bei C rechtwinkliche Dreieck, ferner $AC = x$, $BC = y$, und die Hypotenuse $AB = z$, es ist zu beweisen, daß $x^2 + y^2 = z^2$ ist. Es wachse x um das unendlich kleine Stück $AD = dx$, und DE sey mit AB parallel, so ist BE der unendlich kleine Zuwachs dy der Ka-

thete y, und wenn AF und BG zwei auf DE senkrechte Linien sind, so sind im Parallelogramm ABGF die gegenüberstehenden Seiten FG und AB gleich, also ist DF + GE oder du + dw die unendlich kleine Zunahme dz der Hypotenuse AB oder z. Da im rechtwinklichen Dreieck ADF der Winkel D = BAC, also solches dem Dreieck ABC ähnlich ist, so verhält sich AB : AC = AD : DF, oder z : x = dx : du, also $\frac{xdx}{z} = du$, und da auch im rechtwinklichen Dreieck BEG der Winkel E = ABC ist, (weil DE und AB parallel sind,) so verhält sich AB : BC = BE : EG, oder z : y = dy : dw, also ist $\frac{ydy}{z} = dw$, folglich $\frac{xdx}{z} + \frac{ydy}{z} = du + dw$, oder $\frac{xdx + ydy}{z} = dz$ und daher $2xdx + 2ydy = 2zdz$. Wenn man nun diese Differentialgleichung integrirt, so findet man $x^2 + y^2 = z^2$.

Anmerkung.

Da ich vernommen hatte, daß Professor Kies einen Beweis des Pythagoräischen Lehrsatzes vermittelst der Differentialrechnung gefunden habe, ich solchen aber nicht erhalten konnte, so suchte ich ihn selbst auf, und theile ihn wegen seiner Einfachheit hier mit.

Erster Zusatz.

Aus der Vorstellung, daß die Kathete k eines rechtwinklichen Dreiecks in Zahlen ausgedruckt wird, wenn man die Hypotenuse h mit einer gewissen Zahl m multiplicirt, deren Größe von dem spitzigen Winkel α abhängt, den die Hypotenuse mit einer Kathete bildet, oder daß die Kathete k durch ein Product bestimmet wird, dessen Factoren die Hypotenuse h und eine Function des Winkels α sind, hat Creizenach den Pythagoräischen Lehrsatz hergeleitet. Nemlich, es sey die Hypotenuse $= h$, die eine Kathete $= k$, die andere $= c$, der spitzige Winkel, der k gegenüber liegt $= \alpha$, der andere $= \beta$, so ist $h \sin \alpha = k$ und $h \sin \beta = c$, also $\sin \alpha = \frac{k}{h}$ und $\sin \beta = \frac{c}{h}$. Es werde nun die Grundlinie h durch eine von der Spitze des rechten Winkels gefällte senkrechte in die beiden Abschnitte x und y getheilt, so ist $k \sin \alpha = x$, und $c \sin \beta = y$, so ist $\frac{kk}{h} = x$, und $\frac{cc}{h} = y$, d. i. $\frac{k^2}{h} = x$ und $\frac{c^2}{h} = y$, also $\frac{k^2 + c^2}{h} = x + y = h$. Folglich $k^2 + c^2 = h^2$, welches der Pythagor. Lehrsatz ist. (Man sehe Creizenachs Abhandlung über den eilften Euklidischen Grundsatz, Mainz, 1821.)

Zweiter Zusatz.

Hier will ich noch die sehr einfache und leichte neue Formel, um alle möglichen Pythagorischen Zahlendreiecke zu berechnen, die ich Seite 107 der systematischen Zusammenstellung der Beweise des Pythagoräischen Lehrsatzes aufgestellt habe, entwickeln, ihre Anwendung zeigen, und alles, was aus ihr abgeleitet werden kann, gehörig ausführen.

Nemlich es soll $x^2 + y^2 = z^2$ seyn, und es sey $z = y + t$, so ist $z^2 = y^2 + 2ty + t^2$, und $x^2 = z^2 - y^2$, also $x^2 = y^2 + 2ty + t^2 - y^2$, oder $x^2 = 2ty + t^2 = (2y + t)\,t$, folglich $\frac{x^2}{t} = 2y + t$. Nun kann x eine gegebene Zahl $= a$ seyn, alsdann ist $\frac{a^2}{t} = 2y + t$. Setzt man $2y + t = s$, so ist $y = \frac{s - t}{2}$, und $\frac{a^2}{t} = s$, oder $a^2 = ts$.

Man erhebe also die gegebene Kathetenzahl a aufs Quadrat, und zerlege dieses in seine Theiler oder Factoren in ganzen Zahlen, wovon aber nur diejenigen zusammengehörigen Paare genommen werden, die entweder aus zwei geraden oder zwei unge-

ungeraden Factoren bestehen, wovon der eine $= s$ und der andere $= t$ ist, weil $\frac{s-t}{2}$ eine ganze Zahl werden muß, wenn y eine ganze Zahl seyn soll. Ist also die gegebene Kathetenzahl a eine ungerade Zahl, also ihr Quadrat oder a^2 auch eine ungerade Zahl, so sind alle Theiler von a^2 auch ungerade Zahlen, und daher kann jedes ihrer zusammengehörigen Paare gebraucht werden; ist aber a eine gerade Zahl, so können nur diejenigen Paare der zusammengehörigen Theiler genommen werden, die aus zwei geraden Zahlen bestehen. Es sey z. B. die gegebene Kathetenzahl $a = 9$, so ist $a^2 = 81$, davon sind die Paare der zusammengehörigen Theiler 1 und 81, ferner 3 und 27, (9 und 9 wird ausgeschlossen, weil diese Zahlen gleich sind,) und wenn man das erste Paar gebraucht, so ist $t = 1$ und $s = 81$. Folglich $y = \frac{s-t}{2} = \frac{80}{2} = 40$, und $z = y + t = 40 + 1 = 41$. Also sind die drei ganzen Zahlen, die das Zahlendreieck darstellen, 9, 40 und 41. Es ist auch wirklich $9^2 + 40^2 = 41^2$, nemlich $81 + 1600 = 41^2 = 1681$. Nimmt man das andere Paar Theiler, so ist $t = 3$ und $s = 27$, also $y = \frac{s-t}{2} = \frac{24}{2} = 12$, und $z = y + t = 12 + 3 = 15$.

Auch ist wirklich $81 + 144$ oder $a^2 + y^2 = 225 = 15 \cdot 15 = z^2$.

Es sey ferner die gegebene Zahl a eine gerade Zahl, z. B. 6, so ist $a^2 = 36$, davon sind die Paare der zusammengehörigen Theiler 1 und 36, ferner 2 und 18, ferner 3 und 12, endlich 4 und 9. Von diesen kann nur 2 und 18 gebraucht werden, da sie beide gerade Zahlen sind. Alsdann ist $t = 2$ und $s = 18$. Folglich $y = \frac{s-t}{2} = \frac{16}{2} = 8$, und $z = y + t = 8 + 2 = 10$. Wirklich ist auch $36 + 64$ oder $a^2 + y^2 = 100 = 10 \cdot 10 = z^2$.

Diese Formel giebt auch die Resultate vollständig, wenn $t = z - y$ gegeben ist, das heißt: wenn der Unterschied t gegeben ist zwischen der Zahl der Hypotenuse z und der einen Kathetenzahl y, oder wenn drei ganze Zahlen x, y und z gefunden werden sollen, so daß $x^2 + y^2 = z^2$ ist, und die Hypotenusenzahl z die eine Kathetenzahl um die gegebene Zahl t übertrift. Hier ist wiederum $\frac{x^2}{t} = s$, $y = \frac{s-t}{2}$ und $z = y + t$. Wegen $\frac{x^2}{t} = s$, muß x so gewählt werden, daß t ein Theiler von x^2 ist, damit s eine ganze Zahl wird, und wegen $y = \frac{s-t}{2}$,

muß ſ gerade ſeyn, wenn die gegebene Zahl t gerade iſt, oder ſ ungerade ſeyn, wenn t ungerade iſt, damit ſ — t halbirt eine ganze Zahl für y giebt. Da nun $\frac{x^2}{t} = ſ$ iſt, ſo muß, wenn t ungerade iſt, $x = 3t$, $5t$, $7t$, $9t$, $11t$ u. ſ. f. in das Unendliche angenommen werden, ſo daß nemlich die Coefficienten von t die ungeraden Zahlen nach ihrer Folge ſind. Iſt aber t eine gerade Zahl, ſo kann $x = 2t$, $3t$, $4t$, $5t$, $6t$ u. ſ. f. in das Unendliche angenommen werden, ſo daß die Coefficienten von t jede ganze Zahl ſeyn können.

Im erſten Fall, wenn t ungerade iſt, ſo iſt $x = (2n+1)t$, $ſ = \frac{x^2}{t} = \frac{(2n+1)^2 t^2}{t}$ $= (2n+1)^2 t$. Wenn man alſo für n die ganzen Zahlen nach der Ordnung 1, 2, 3, 4, u. ſ. f. ſetzt, ſo iſt $ſ = 9t$, $25t$, $49t$, $81t$, $121t$, u. ſ. f. in das Unendliche. Ferner iſt $y = \frac{ſ-t}{2} = \frac{(2n+1)^2 t - t}{2}$ $= \frac{[(2n+1)^2 - 1]\, t}{2} = 2n(n+1)t$. Oder $y = 4t$, $12t$, $24t$, $40t$, $60t$, $84t$, $112t$, $144t$ u. ſ. f. oder $= 2.2t$, $4.3t$, $6.4t$, $8.5t$, $10.6t$, u. ſ. f. wo das Geſetz des Fortgangs der Reihe klar iſt.

Endlich ist $z = y + t = 2n(n+1)t + t$. Oder $z = 5t, 13t, 25t, 41t, 61t, 85t$, u. s. f. wo das Gesetz der Reihe wiederum klar ist, nemlich $(2 \cdot 2 + 1)t, (4 \cdot 3 + 1)t, (6 \cdot 4 + 1)t$, u. s. f. Die Anwendung will ich an ein Paar Beispielen zeigen.

Es soll der Unterschied zwischen der Hypotenuse und der einen Kathete $= 5$ seyn, so ist

$x = 3t$	$5t$	$7t$	$9t$	$11t$	$13t$	. . .
15	25	35	45	55	65	. . .
$y = 4t$	$12t$	$24t$	$40t$	$60t$	$84t$	. . .
20	60	120	200	300	420	. . .
$z = 5t$	$13t$	$25t$	$41t$	$61t$	$85t$	. . .
25	65	125	205	305	425	. . .

Im zweiten Fall, wenn t gerade ist, kann s wie vorhin $(2n+1)^2 t$, es kann aber auch $4n^2 t$, also überhaupt $= n^2 t$ seyn, wo n die ganzen Zahlen nach ihrer Folge, wie vorhin bedeutet. Folglich ist $x = nt$. Ferner ist $y = \frac{s-t}{2} = \frac{n^2 t - t}{2} = \frac{(n^2-1)t}{2}$. Endlich $z = \frac{(n^2-1)t}{2} + t = \frac{n^2 - t + 2t}{2} = \frac{(n^2+1)t}{2}$.

Es sey z. B. der Unterschied t zwischen der Hypotenuse und einer Kathete $= 4$ gegeben, es soll

x, y und z gefunden werden, so daß $x^2 + y^2 = z^2$ und $z = y + 4$ ist.

$x =$	$2t$	$3t$	$4t$	$5t$	$6t$	$7t \ldots$
	8	12	16	20	24	28 …
$y =$	$\frac{3t}{2}$	$4t$	$\frac{15t}{2}$	$12t$	$\frac{35t}{2}$	$24t \ldots$
	6	16	30	48	70	96 …
$z =$	$\frac{5t}{2}$	$5t$	$\frac{17t}{2}$	$13t$	$\frac{37t}{2}$	$25t \ldots$
	10	20	34	52	74	100 …

Endlich, wenn die Aufgabe ist: drei ganze Zahlen zu finden, so daß nicht nur $x^2 + y^2 = z^2$, sondern auch $x - y = d$, das heißt: der Unterschied der beiden Zahlenkatheten der gegebenen ganzen Zahl d gleich sey, so kann man die zur Auflösung führende Formel auf folgende Art finden.

Es soll seyn $x^2 + y^2 = z^2$ und $x - y = d$, also ist $x - d = y$ und $x^2 - 2dx + d^2 = y^2$, da aber auch $x^2 = z^2 - y^2$ ist, so ist $z^2 - y^2 - 2dx + d^2 = y^2$, also $z^2 - 2dx + d^2 = 2y^2$, oder, (da $x = y + d$,) $z^2 - 2d(y + d) + d^2 = 2y^2$, oder $z^2 - 2dy - 2d^2 + d^2 = 2y^2$, oder $z^2 - 2dy - d^2 = 2y^2$, oder $z^2 - d^2 = 2y^2 + 2dy$ oder $(z + d)(z - d) = 2(y + d)\,y$ und $z + d = \frac{2y}{z-d} \cdot (y + d)$ also $z = \frac{2y}{z-d}(y + d) - d$. Wenn nun m eine

gewisse ganze Zahl bedeutet, so setze man $y + d = m(z - d)$, so ist $y = m(z - d) - d$, $x = y + d = m(z - d)$ und $z = \frac{2m(z-d)}{z-d}[m(z-d)-d] - d$, oder $z = 2m[m(z-d)-d] - d$. Folglich $z = 2m^2z - 2m^2d - 2md - d$, und $2m^2z - z = 2m^2d + 2md + d$, also $(2m^2 - 1)z = 2m^2d + 2md + d$, und $z = \frac{(2m^2 + 2m + 1)}{2m^2 - 1}d$, und wenn man wirklich dividirt, $z = \frac{2(m+1)}{2m^2-1}d + d$, oder $z = 2(m+1)\frac{d}{2m^2-1} + d$.

Setzt man nun, welches das einfachste ist, $m = 1$, so ist $z = 5d$, $x = m(z - d)$, also (für $m = 1$) $x = z - d$ und y ist allemal $= x - d$, also hier $y = z - 2d$.

Für $m = 2$, ist $z = \frac{6}{7}d + d$, $x = 2(z - d)$ und $y = x - d$.

Für $m = 3$, ist $z = \frac{8}{17}d + d$, $x = 3(z - d)$ und $y = x - d$.

Für $m = 4$, ist $z = \frac{10}{31}d + d$, $x = 4(z - d)$ und $y = x - d$.

Für $m = 5$, ist $z = \frac{12}{49}d + d$, $x = 5(z - d)$ und $y = x - d$.

Welche ganze Zahl nun als d gegeben werden mag, so kann doch allemal $m = 1$ gesetzt, und folglich sogleich ein Werth für z, x und y gefunden werden. Will man aber mehrere Werthe finden, so muß man die gegebene Zahl d in ihre Factoren zerlegen, und bemerken, ob sich 7, 17, 31 oder überhaupt $2m^2 - 1$ darunter befinden, das heißt: ob d durch $2m^2 - 1$ theilbar ist. Alsdann wird z eine ganze Zahl.

Z. B. Es sey die gegebene Zahl $d = 21$.

Man setze $m = 1$, so ist $z = 5d = 105$, $x = z - d = 105 - 21 = 84$, und $y = x - d = 84 - 21 = 63$.

Für $m = 2$, ist $z = \frac{6}{7}d + d = 6 \cdot \frac{21}{7} + 21 = 6 \cdot 3 + 21 = 18 + 21 = 39$. $x = 2(z - d) = 2 \cdot 18 = 36$, und $y = x - d = 36 - 21 = 15$.

Die folgenden Werthe von m sind hier nicht zu gebrauchen. Also hat man zwei Werthe für x, y und z gefunden. Doch würde man irren, wenn man glauben wollte, es seyen dieß alle möglichen Werthe in ganzen Zahlen von x, y und z für $d = 21$. Nemlich wenn man $m = \frac{3}{2}$ annimmt, erhält man auch ein brauchbares Resultat, denn alsdann ist: $z = 21 +$

$[2 \cdot (\frac{3}{2}+1) \frac{21}{2 \cdot \frac{9}{4} - 1}$, d. i. $= 5 \cdot \frac{21}{3\frac{1}{2}} = 5 \frac{42}{7} = 5 \cdot 6 = 30]$, also $z = 21 + 30 = 51$. Ferner $x = m(z-d) = \frac{3}{2}(51-21) = \frac{3}{2} \cdot 30 = 45$, und $y = x - d = 45 - 21 = 24$. Dieser brauchbare unächte Bruch für m wird so hergeleitet.

Es sey $m =$ dem unächten Bruch $\frac{b+n}{b}$, in welchem b und n ganze Zahlen sind. Nun wird in der Formel für z 1) der Factor $2(m+1)$ als ganze Zahl angenommen, also muß $2\left(\frac{b+n}{b}+1\right)$ eine ganze Zahl seyn, d. i. $\frac{2(2b+n)}{b}$ oder $\frac{4b+2n}{b}$ d. i. $4+\frac{2n}{b}$ eine ganze Zahl, daher auch $\frac{2n}{b}$ eine ganze Zahl. Setzt man nun $n = \frac{1}{2}b$, so wird $\frac{2n}{b} = 1$, und $\frac{4b+2n}{b} = 4 + \frac{2n}{b} = 4+1 = 5 = 2(m+1)$. Also $2\frac{1}{2} = m+1$, und daher $1\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{2} = m$.

2) Substituirt man diesen Werth von m in dem zweiten Factor $\frac{d}{2m^2-1}$ der Formel für z, so findet man $\frac{d}{2 \cdot \frac{9}{4} - 1} = \frac{d}{\frac{18}{4} - 1} = \frac{4d}{18-4} = \frac{4d}{14} = \frac{2d}{7}$. Soll nun dieser Ausdruck eine ganze Zahl werden, so muß die gegebene ganze Zahl d durch 7 theilbar, das

heißt d muß $= 7$, oder 14, 21, 28, 35 u. s. f. seyn, sodann wird $z = \frac{5 \cdot 2d}{7} + d = \frac{10d}{7} + d$. Ferner ist $x = m(z-d) = \frac{3}{2}(z-d) = \frac{3}{2}\left(\frac{10d}{7} + d - d\right)$ $= \frac{3}{2} \cdot \frac{10d}{7} = \frac{30}{14}d = \frac{15d}{7}$, und $y = x - d = \frac{8d}{7}$.

Uiberhaupt sey $m = \frac{a}{b}$, so ist, wenn man in der für die Hypotenusenzahl z hergeleiteten Formel $\frac{a}{b}$ statt m setzt, $\frac{2(a+b)}{b} \cdot \frac{b^2 d}{2a^2 - b^2} + d = z$, oder $2(a+b)b \cdot \frac{d}{2a^2 - b^2} + d = z$. Wenn also $2a^2 - b^2$ ein Theiler der gegebenen ganzen Zahl d ist, so wird z auch eine ganze Zahl. Es kommt nun darauf an, a und b so zu wählen, daß $2a^2 - b^2$ ein Theiler von d ist. Dabei sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, nemlich ob d eine vollkommene Quadratzahl ist, oder nicht. Ist d eine, so nehme man ihre Quadratwurzel r fünfmal, so ist $5r = a$, dann subtrahire man d von $2a^2$, so ist der Rest $= b^2$ eine vollkommene Quadratzahl, (wie hernach gezeigt werden soll,) also b eine ganze Zahl. Oder man setze $6r = a$, und subtrahire 8d von $2a^2$, so ist der Rest $= b^2$ u. s. f. Z. B. Es sey $d = 64$, so ist $r = 8$, $5r = 40 = a$,

also $1600 = a^2 = 25 r^2$ und $3200 = 2a^2 = 50^2$, ferner $3200 - 64 = 3136 = 49 r^2 = b^2$, und $56 = b$. Daher $\frac{a}{b} = \frac{40}{56} = \frac{5}{7}$, also nun $2(a+b)b = 2.12.7$, und $2a^2 = 2.25$, $b^2 = 49$, folglich $2a^2 - b^2 = 50 - 49 = 1$, also $2.12.7d + d = z$, d. i. $169d = z$, sodann $\frac{5}{7}.168d = x$, d. i. $120d = x$, und $119d = y$. Es kann also d jede beliebige vollkommene Quadratzahl seyn, und z, x und y können dann allemal nach diesen drei Formeln gefunden werden. Ist d, wie hier $= 64$, so ist $169.64 = z = 10816$, ferner $120.64 = x$ und $119.64 = y$.

Ist aber d keine vollkommene Quadratzahl, so läßt sich, wenn man $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ annimmt, eine allgemeine Formel angeben, die für alle gegebene d angewendet werden kann. Nemlich hier ist $2(a+b)b = 2.7.4$ und $2a^2 - b^2 = 18 - 16 = 2$, also $\frac{2(a+b)b}{2a^2 - b^2} = \frac{2.7.4}{2} = 7.4 = 28$. Also $28d + d = 29d = z$, ferner $\frac{28d.3}{4} = 21d = x$ und $20d = y$. Diese Formel kann also auch, wenn d eine vollkommene Quadratzahl ist, angewendet werden.

Nimmt man m oder $\frac{a}{b}$ als einen **unächten** Bruch, oder auch als einen ächten Bruch (aber **größer** als $\frac{3}{4}$) an, so erhält man Formeln, die nicht für **jedes** gegebene d brauchbar sind, doch kann man zeigen, auf welche d sie angewendet werden können. Nemlich: es sei $\frac{a}{b}$ oder $m = \frac{4}{3}$, so ist nach der vorhergehenden Formel $\frac{42\,d}{23} + d = z$. Hier muß also das gegebene $d = 23$, oder ein Vielfaches von 23 seyn. Sodann ist $\frac{4}{3} \cdot \frac{42}{23}d$ oder $\frac{56}{23}d = x$, und $\frac{56}{23}d - d$ oder $\frac{33}{23}d = y$. Es sey ferner $m = \frac{5}{4}$, so ist $\frac{72d}{34} + d$ oder $\frac{36}{17}d + d = z$, also muß d, wenn diese Formel angewendet werden soll, durch 17 theilbar seyn, sodann ist $\frac{5}{4} \cdot \frac{36d}{17}$ oder $\frac{45}{17}d = x$ und $\frac{28}{17}d = y$. Endlich wenn $m = \frac{6}{5}$ angenommen wird, so ist $\frac{110d}{47} + d = z$, $\frac{132d}{47} = x$ und $\frac{85\,d}{47} = y$, u. s. f.

Bei jedem gegebenen d lassen sich aber dennoch zwei Werthe für z finden, der eine ist, ($m = 1$ gesetzt,) $5\,d = z$, und der zweite, ($m = \frac{3}{4}$ gesetzt,) $29\,d = z$.

Ich will die Anwendung der Formeln noch an einem Beispiel zeigen. Es sey der gegebene Unterschied d zwischen x und y $= 49$. Zuerst nimmt man, wie allemal, $m = 1$ und $= \frac{3}{4}$ an, so ist für $m = 1$, $z = 5d = 245$, $x = z - d = 245 - 49 = 196$ und $y = x - d = 196 - 49 = 147$, und für $m = \frac{3}{4}$, $z = 29d$, $x = 21d$, und $y = 20d$.

Alsdann zerlegt man 49 in die Factoren $7 . 7$ und $1 . 49$. Da also hier d durch 7 theilbar ist, kann man $m = \frac{3}{2}$ und auch $= 2$ setzen, und da hier d auch durch 49 theilbar ist, kann man auch $m = 5$ annehmen. Endlich da 49 eine vollkommene Quadratzahl ist, so ist auch $m = \frac{5}{7}$, und $169d = z$.

Für $m = \frac{3}{2}$ ist $z = \frac{10}{7} d + d = \frac{10}{7} . 49 + 49 = 70 + 49 = 119$. $x = \frac{3}{2}(z - d) = \frac{3}{2}(119 - 49) = 105$, und $y = x - d = 105 - 49 = 56$.

Für $m = 2$ ist $z = \frac{6}{7} d + d = \frac{6}{7} . 49 + 49 = 42 + 49 = 91$, $x = 2(z - d) = 2 . 42 = 84$, und $y = x - d = 84 - 49 = 35$.

Für $m = 5$ ist $z = \frac{12d}{49} + d = 12 + 49 = 61$, $x = 5(z - d) = 5 . 12 = 60$ und $y = x - d = 60 - 49 = 11$.

Da 49 eine vollkommene Quadratzahl ist, so ist $z = 169d = 8281$, $x = 120d = 5880$, und $y = 119d = 5831$.

Endlich für $m = \frac{3}{4}$ ist $z = 29d = 1421$ $x = 21d = 1029$ und $y = 20d = 980$.

Wenn man die Reihe $\frac{6}{7}d$, $\frac{8}{17}d$, $\frac{10}{31}d$, $\frac{12}{49}d$, $\frac{14}{71}d$, $\frac{16}{97}d$, u. s. f. betrachtet, so sieht man, daß die Zähler in einer arithmetischen Reihe fortgehen, in der das erste Glied 6, und die Differenz $= 2$ ist, das nte Glied ist also $= 2n + 4$. Die Nenner aber gehen in einer arithmetischen Reihe des zweiten Ranges fort, in der das erste Glied $= 7$, das zweite $= 17$, und das dritte $= 31$ ist. Das nte Glied derselben ist also $= 2n^2 + 4n + 1$. Aber n ist in beiden Reihen $= m - 1$, setzt man also $m - 1$ statt n in diese beiden Formeln, so ist $2n + 4 = 2m + 2 = 2(m+1)$, und $2n^2 + 4n + 1 = 2m^2 - 1$. Es erscheinen also unter der gemachten Voraussetzung wiederum die Coefficienten in der allgemeinen Formel für z. Also ist bewiesen, daß Zähler und Nenner nach dem Gesetz der benannten Reihen fortgehen, und zwar sind die Zähler lauter gerade Zahlen, die Nenner aber bestehen

größtentheils aus Primzahlen, und die keine Primzahlen sind, sind Producte aus der Zahl sieben in eine Primzahl, folglich sind alle Nenner ungerade Zahlen.

Wenn nun diese Reihe zur Bestimmung von z tauglich seyn soll, so muß die gegebene Zahl d, wenn sie nicht ein Product aus 7, 17, 31, 71, 97 u. s. f. in irgend eine ganze Zahl ist, eine ungerade Zahl, und von der Beschaffenheit seyn, daß $\frac{d+1}{2}$ eine vollkommene Quadratzahl ist. Denn es sey $\frac{d+1}{2} = m^2$, so ist $d + 1 = 2m^2$ und $d = 2m^2 - 1$. Es sey z. B. $d = 71$, so ist $d + 1 = 72$, davon die Hälfte $= 36 = m^2$, also $6 = m$.

Für jedes gegebene d können aber unfehlbar doch wenigstens zwei Werthe für z gefunden werden. Der eine nemlich, wenn $m = 1$ und der andere, wenn $m = \frac{3}{4}$ angenommen wird. Setzt man $m = 1$, so ist nicht nur der Kathetenunterschied, sondern auch der Unterschied zwischen der Hypotenuse und der größern Kathete $= d$, oder die beiden Unterschiede sind gleich. Ist d eine vollkommene Quadratzahl, so kann man ausser $m = 1$,

und $m = \frac{3}{4}$, auch $z = 169\,d$ setzen, und also sogleich drei Werthe für z finden.

Wenn man aus der vorhin angegebenen Formel für z die Zahl m, die eine ganze Zahl oder ein Bruch werden kann, entwickelt, so findet man nach gehöriger Reduction $m = \frac{d + \sqrt{[2z^2 - d^2]}}{2(z - d)}$. Ist also die Differenz der Kathetenzahlen $= d$ gegeben, so findet man m, wenn man im Stande ist, für z eine solche ganze Zahl anzunehmen, daß $2z^2 - d^2$ eine vollkommene Quadratzahl wird, und wenn m als Bruch $= \frac{a}{b}$ gefunden wird, so ist zugleich dessen Nenner b ein Theiler von $z - d$, wegen der Gleichung für x, da $z = 2(a+b)\,b\,u\,d + d$ und $x = m(z-d)$, also hier $= 2a(a+b)\,u\,d$ oder $= \frac{a}{b}\cdot(z-d)$ ist. Z. B. Wenn $d = 21$ gegeben ist, so ist $z = 51$ anzunehmen, denn von $2z^2 = 5202$ abgezogen $d^2 = 441$, ist der Rest 4761 eine vollkommene Quadratzahl, deren Wurzel $= 69$ ist. Daraus findet man $m = \frac{3}{2}$, und daraus $x = \frac{3}{2}(z-21) = \frac{3}{2}(51-21) = \frac{3}{2}\cdot 30 = 45$, und endlich $y = x - 21 = 45 - 21 = 24$. Auch kann man $z = 105$ für das gegebene $d = 21$ annehmen. Denn es ist $2z^2 = 22050$, und $d^2 = 441$, also $2z^2 - d^2 =$

21609, wovon die Quadratwurzel 147 ist, daraus findet man $m = 1$. Da nun aus der Formel für z, wenn $m = 1$ ist, $z = 5d$ hergeleitet wurde, und 105 wirklich 5 mal 21 ist, so ist daraus klar, wie z anzunehmen ist, daß $2z^2 - d^2$ ein vollkommenes Quadrat wird. Man erhebe nemlich das Fünffache der gegebenen Zahl, (nemlich $5d = z$,) auf das Quadrat, (giebt $25d^2$) $= z^2$, verdopple es, (giebt $50d^2$) und subtrahire das Quadrat d^2 der gegebenen Zahl, so ist der Rest $49d^2$ eine vollkommene Quadratzahl. Das ist nun die eine Methode, $2z^2 - d^2$ als vollkommenes Quadrat darzustellen, indessen muß es noch andere Methoden geben. Nemlich wenn man $z = \frac{13}{7}d$, oder $= \frac{17}{7}d$, oder $= \frac{25}{17}d$ setzt, kurz, die vorhin angegebenen Werthe von z anwendet, vorausgesetzt, daß die gegebene Zahl d durch den entsprechenden Nenner theilbar ist, so wird der Ausdruck $2z^2 - d^2$ auch ein vollkommenes Quadrat. So hat uns also die Untersuchung der Pythagoräischen Zahlendreiecke zur allgemeinen Auflösung der unbestimmten Aufgabe: Alle solche ganze Zahlen z zu finden, bei denen, wenn das Quadrat einer gegebenen ganzen Zahl von dem doppelten

ten Quadrat einer jeden dieser Zahlen abgezogen wird, der Rest eine vollkommene Quadratzahl sei. Z. B.

m	Gegebene Zahlen.	Anzunehmende Zahlen = z.	Vollkommene Quadrate als Reste.
1	d	5 d	$49\ d^2$
2	7 d	35 d	$2401\ d^2$
2	7 d	13 d	$289\ d^2$
$\frac{3}{2}$	7 d	17 d	$529\ d^2$
3	17 d	85 d	$14161\ d^2$
3	17 d	25 d	$961\ d^2$
4	31 d	155 d	$47089\ d^2$
4	31 d	41 d	$2401\ d^2$
	.	.	.
	.	.	.
	.	.	.
	$(2m^2-1)d$	$(2m^2+2m+1)d$	$(2m^2+4m+1)^2 d^2$

Hier bedeutet m jede beliebige ganze Zahl, und jeden unächten Bruch, nur wird im letztern Fall, $2m^2-1$ und $2m^2+2m+1$ auf einen gemeinschäftlichen Nenner reducirt, und dieser bei dem Ansatz in der Tabelle weggelassen.

Uibrigens bedeutet d jede gegebene ganze Zahl, oder jede beliebige ganze Zahl. Setzt man also $d=1$, so sind die in der ersten Spalte herabstehenden Zahlen, 1, 7, 17, 31 u. s. f. Setzt man $d=2$, so sind diese Zahlen, 2, 14, 34, 62 u. s. f. Setzt man $d=3$, so sind sie: 3, 21, 51, 93 u. s. f.

Endlich kann noch folgende Aufgabe aufgelöset werden. Es ist die Hypotenusenzahl h gegeben, man soll zwei ganze Zahlen x und y finden, so daß $x^2 + y^2 = h^2$ ist. Man setze $h = u + w$ und $y = u - w$, so ist $x^2 + y^2 = x^2 + (u - w)^2 = x^2 + u^2 - 2uw + w^2$ und $h^2 = u^2 + 2uw + w^2$, also $h^2 - y^2 = 4uw = x^2$, und daher $x = 2\sqrt{uw}$.

Man zerlege also die gegebene Hypotenuse, die man als eine Summe von irgend ein Paar ganzen Zahlen betrachtet, in die möglichen Paare von Summanden in ganzen Zahlen, und bemerke, welches Paar davon Factoren einer vollkommenen Quadratzahl sind, davon ist der größere $= u$ und der kleinere $= w$, sodann ist $y = u - w$ und $x = 2\sqrt{uw}$.

Z. B. Es sey die gegebene Hypotenusenzahl $h = 20$, davon sind die Paare von Summanden, $1 + 19$, $2 + 18$, $3 + 17$, $4 + 16$, $5 + 15$, $6 + 14$, $7 + 13$, $8 + 12$, $9 + 11$, $10 + 10$. Davon sind brauchbar 2 und 18, so wie 4 und 16, denn 2 mal 18 giebt die vollkommene Quadratzahl 36, so wie 4 mal 16 die vollkommene Quadratzahl 64. Nimmt man zuerst 2 und 18, so ist $u = 18$, und $w = 2$, also $y = u - w = 16$, und $x = 2\sqrt{uw}$

$= 2 \cdot \sqrt{36} = 2 \cdot 6 = 12$. Auch ist wirklich $12 \cdot 12$ oder 144, $+ 16 \cdot 16$ oder $256 = 400 = 20 \cdot 20$.

Nimmt man hierauf das andere Paar Summanden 4 und 16, so ist $u = 16$, und $w = 4$, also $y = u - w = 12$ und $x = 2\sqrt{uw} = 2 \cdot \sqrt{64} = 2 \cdot 8 = 16$. Dieses sind die vorigen Resultate für die Katheten, nur verwechselt.

Es sey ferner $h = 17 = 1 + 16$, $2 + 15$, $3 + 14$, $4 + 13$, $5 + 12$, $6 + 11$, $7 + 10$, $8 + 9$, von diesen Paaren Summanden ist nur 1 und 16 brauchbar. Also ist $u = 16$ und $w = 1$, also $y = u - w = 15$ und $x = 2\sqrt{16} = 2 \cdot 4 = 8$.

Endlich sey $h = 10 = 1 + 9$, $2 + 8$, $3 + 7$, $4 + 6$, davon sind brauchbar 1 mal 9, und 2 mal 8. Für das erste ist $u = 9$, $w = 1$, $y = 8$, $x = 2 \cdot 3 = 6$. Für das zweite Paar ist $u = 8$, $w = 2$, $y = 6$, $= x$ $2 \cdot 4 = 8$. Also die Kathetenzahlen verwechselt.

Man sieht, daß die Auflösung dieser Aufgabe unmöglich ist, wenn die gegebene Hypotenusenzahl h nicht wenigstens ein Paar Summanden enthält, de-

ren Produkt eine vollkommene Quadratzahl q ist. In dieser Rücksicht muß $h = \frac{1}{n} q + n$ seyn, wo n alle ganzen Zahlen von 1 an, nach ihrer Folge bedeutet, und zugleich anzeigt, daß das nte Paar Summanden der Zahl h mit einander multiplicirt, die vollkommene Quadratzahl q giebt. Z. B. Es sey $h = 17$. Ist nun $n = 1$, und man nimmt $q = 16$ an, so ist $h = q + 1 = 16 + 1 = 17$. Also ist 17 als h zu gebrauchen. Ferner sey $h = 20$. Ist nun $n = 2$, und man setzt $q = 36$, so ist $h = \frac{36}{2} + 2 = 18 + 2 = 20$. Also ist 20 eine brauchbare Hypotenusenzahl, und das Product ihres zweiten Summanden-Paares 2 und 18 ist $= 36 = q$. Soll das gegebene h nicht geprüft, sondern h so gewählt werden, daß x und y in ganzen Zahlen dazu passen, so verfährt man fast eben so. Man nimmt eine beliebige vollkommene Quadratzahl q, so kann man für dieses q die h bestimmen, wenn man nach und nach für n die ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 u. s. f. setzt, und die Theiler von q daraus gebraucht. Z. B. Für $q = 16$, ist $n = 1, 2, 4, 8, 16$, also $h = 17$ und 10. Doch muß derjenige Theiler, welcher die Quadratwurzel von q ist, so wie

die, welche größer als die Quadratwurzel von q sind, weggelassen werden. Denn sonst findet kein Werth für y statt, oder man erhält die schon gefundenen Zahlen.

Nun läßt sich die Zusammensetzung von x, y, z, t und d aus irgend einer vollkommenen Quadratzahl q und einem beliebigen Theiler n derselben leicht übersehen. Nemlich $\frac{q}{n}$ ist $= u$, und $n = w$. Also $x = 2\sqrt{uw} = 2\sqrt{q}$, $y = u - w$, $= \frac{q}{n} - n$, $z = \frac{q}{n} + n$, $y + z = \frac{2q}{n}$, $z - y = t + 2n$, $x - y = d = 2\sqrt{q} - \frac{q}{n} + n$, $z - x = \frac{q}{n} + n - 2\sqrt{q}$, $x + y + z = \frac{2q}{n} + 2\sqrt{q} = 2\left(\frac{q}{n} + \sqrt{q}\right)$ $x + y = 2\sqrt{q} + \frac{q}{n} - n$, $x^2 = 4q$, $y^2 = \frac{q^2}{n^2} - 2q + n^2$, und $z^2 = \frac{q^2}{n^2} + 2q + n^2$. Endlich $m = \frac{n(n + \sqrt{q})}{q - n^2}$.

Literärische Bemerkung.

Ausser der in meiner systematischen Zusammenstellung der Beweise des Pythagoräischen Lehrsatzes angeführten Dissertatio mathematica de theoremate Pythagorico, quam praeside Jo. Georg. Scherzio eruditorum examini submittit Ernest. Henr. Stoeber, Argentor. 1743, ist noch über diesen Gegenstand zu bemerken: Jo. Georg. Hornberger de magistro matheseos, praeside Jo. G. Christoph. Feuerlein, Vitembergae, 1701, und Franc. Christ. Jetze, de demonstrationibus theorematis pythagorici, praeside Jo. Joachim. Lange, Halae, 1752. Endlich die bekannte Abhandlung von J. Jos. Ignaz Hoffmann.

Hiebei bemerke ich, daß Herr Hofrath Joh. Tobias Mayer zu Göttingen der Erfinder derjenigen Beweisart ist, welche ich in meiner vorhin genannten Schrift: systematische Zusammenstellung u. s. f. Seite 62 bis 64, als die fünfzehnte Beweisart aufgestellt habe. Er hat solche schon im Jahre 1772 erfunden, und in seinen, in den

Jahren 1779 — 1785 zu Altdorf gehaltenen Vorlesungen öfters vorgetragen, und dadurch bekannt gemacht. Daher hat sie von Tempelhof in seine 1790 herausgegebene Geometrie für Soldaten schon aufnehmen können.

In der Verlagshandlung ist erschienen:

Bodmer, v. Betrachtungen über die Bauart der Privatgebäude in Deutschland. Mit 60 Kupfertaf. N. Aufl. gr. Fol. Rthlr. 5. oder 7 fl. 30 kr.

Hohenadel, theoretisch-praktische Meßkunst für unstudirte Forstmeister und solche, die sich in diesem Fache selbsten unterrichten wollen, 3 Thle. Mit 42 Kpfn. 8. Rthlr. 2. 16 ggr. oder 4 fl.

Kern, geschichtliche Darstellung des Vertheidigungs-Standes und der Kriegsbegebenheiten der Stadt Augsburg, von der ältesten bis auf die neueste Zeit. Mit 13 Plänen und 1 Karte. gr. 8. Rthlr. 1. 16 ggr. oder 2 fl. 30 kr.

Lecoy, F. einfache und leichte Lehrart zu Aufnahme des Plans, nebst einem Traktat vom Nivelliren und einem Auszug der Regeln vom Tuschen, mit 12 Kupfertafeln, wovon 9 illuminirt sind ꝛc. neue vermehrte Auflage, von A. Mayer. 8. Rthlr. 1. 8 ggr. oder 2 fl.

Müller's, J. W. gemeinfaßlicher Unterricht, den Inhalt zirkelrunder und ovaler Fässer, an welchen die erforderlichen Stücke mit einem gewöhnlichen, in baierische Fuße eingetheilten Maasstab gemessen sind, auf eine sehr leichte Art in baierischen Eimern zu berechnen. 4 Hefte, mit Kupf. 8. 20 ggr. oder 1 fl. 15 kr.

— — Repertorium der mathematischen Litteratur, in alphabet. Ordnung, 3 Thle. gr. 8. Rthtr. 1. 17 ggr. oder 2 fl. 36 kr.

Nilson, C. A. gründliche Unterweisung in der Linear-Perspective, oder Anleitung zur perspectivischen Stereometrie, in verschiedenen Beispielen vorgetragen, für Schulen und zum Selbst-Unterricht derjenigen nothwendig, die sich in derselben üben wollen und müssen, mit 56 gr. 4. Kupf. gr. 8. Rthlr. 3. oder 4 fl. 30 kr.

Anhang

zur

Ergänzung der vorhergehenden Theorie der Pythagoräischen Zahlendreiecke.

Bei den Aufgaben für die Pythagoräischen, durch ganze Zahlen bestimmten Dreiecke, deren eine Kathetenzahl mit x, die andere mit y und die Hypothenusenzahl mit z bezeichnet wird, finden, in Beziehung auf eine gegebene ganze Zahl, sieben Fälle statt, so daß zugleich $x^2+y^2=z^2$ ist. Es kann nemlich diese gegebene Zahl seyn: 1) $a=x$ oder $=y$, 2) $t=z-y$, oder $T=z-x$, (in so ferne hier x die kleinere und y die größere Kathetenzahl bedeutet,) 3) $d=x-y$, (wenn hier y die kleinere Kathetenzahl ist,) 4) $h=z$, 5) $F=y+z$, (wobei unbestimmt bleibt, ob y die kleinere oder größere ist,) 6) $g=x+y$, 7) $S=x+y+z$.

Die Auflösung der ersten vier Aufgaben ist in der vorigen Abhandlung gezeigt worden, doch finden da-

bei noch folgende Bemerkungen statt. Bei der zweiten Aufgabe, da $t = z - y$ ist, sind nach Seite 52 und 53 eine unendliche Menge Auflösungen möglich, und dennoch giebt es noch mehrere, wenn $2t = b^2$ oder $= mb^2$ ist, wobei m jede beliebige ganze Zahl bedeutet. Nemlich hier kann n als ächter oder unächter Bruch, $= \frac{a}{b}$ angenommen werden. Denn da $2t = mb^2$ ist, so ist $\sqrt{\frac{2t}{m}} = b$, der Zähler a aber kann jede ganze Zahl seyn. Nun ist nach Seite 51 $x = t + 2nt$, und n ist hier $= \frac{a}{b} = \frac{ma}{\sqrt{2mt}}$, also $x = t + \frac{2mat}{\sqrt{2mt}} = t + a\sqrt{2mt}$, und $y = 2n^2t + 2nt$, (S. 51) $= ma^2 + a\sqrt{2mt}$. Endlich ist $z = y + t$. Wenn das gegebene t selbst $= b^2$ ist, so ist $m = 2$, u. $b = \sqrt{t}$, also $x = t + 2a\sqrt{t}$ und $y = 2a^2 + 2a\sqrt{t}$. Ist aber $2t = b^2$, so ist $m = 1$, und $b = \sqrt{2t}$. Also $x = t + a\sqrt{2t}$ und $y = a^2 + a\sqrt{2t}$.

Z. B. Es sey $t = 8$, also $2t = 16 = b^2$. Folglich $b = 4$ und $m = 1$. Daher $x = t + a\sqrt{2t} = 8 + a\sqrt{16} = 8 + 4a$, und $y = a^2 + a\sqrt{t} = a^2 + 4a$. Man setze nun $a = 1, 2, 3, 4, 5$ u. s. f. so ist für $a = 1$, $x = 8 + 4 = 12$, $y = 1 + 4 = 5$, und $z = y + t = 5 + 8 = 13$. Für $a = 2$, ist $x = 8 + 8 = 16$, $y = 4 + 8 = 12$ und $z = 12 + 8 = 20$.

Für $a=3$, ist $x=20$, $y=21$ und $z=29$. Es sey ferner $t=9$, so ist $b^2=t$, und $b=3$, m aber $=2$. Also $x=t+2a\sqrt{t}$, und $y=2a^2+2a\sqrt{t}$, d. i, $x=9+6a$ und $y=2a^2+6a$. Für $a=1$ ist nun $x=9+6=15$, $y=2+6=8$, und $z=y+t=8+9=17$. Für $a=2$ ist $x=9+12=21$, $y=8+12=20$, und $z=29$. Und s. f.

Es sey $t=50$, so ist $2t=100=4.25=mb^2$, also $m=4$, und $b=5$. Daher $x=t+a\sqrt{2mt}=50+a\sqrt{2.4.50}=50+20a$, $y=ma^2+a\sqrt{2mt}=4a^2+20a$. Für $a=1$ ist nun $x=50+20=70$, $y=4+20=24$ und $z=24+50=74$. Für $a=2$ ist $x=50+40=90$, $y=16+40=56$ und $z=56+50=106$, u. s. f.

Uibrigens ist bei Vergleichung der Formeln für x und y klar, daß wenn ma^2 kleiner ist als t, auch y kleiner als x wird. Nun ist aber $t=\frac{mb^2}{2}$, also ist auch ma^2 kleiner als $\frac{mb^2}{2}$, und daher $2a^2$ kleiner als b^2, folglich auch $a\sqrt{2}$ kleiner als b. Wenn also $\frac{a}{b}$ ein solcher ächter Bruch ist, daß sein Zähler a mit $\sqrt{2}$, oder ohngefehr mit $1\frac{1}{2}$ multiplicirt, nicht größer als der Nenner b wird, so ist y kleiner als x.

Gesetzt, man bezeichne die kleinere Kathetenzahl eines Pythagoräischen Dreiecks mit x, die grö-

ßere mit y, setze $z - y = t$, und $z - x = T$. Wird nun eine gewisse ganze Zahl T als Unterschied der beiden Kathetenzahlen gegeben, um daraus x, y und z zu finden, so ist darauf zu sehen, ob das Doppelte von T irgend eine vollkommene Quadratzahl b^2 oder ein Vielfaches von b^2 ist. In diesem Fall kann T sowohl t als T bedeuten. Soll T das T oder $z - x$ angeben, so setzt man, nachdem b bestimmt worden, $a = 1, 2, 3$ u. s. f. So lange noch $1\frac{1}{2}a$ kleiner als b ist, wird diejenige gefundene Kathetenzahl, zu der T addirt wird, um z zu erhalten, die kleinere, also $T = z - x = T$ seyn. Soll aber T das t oder $z - y$ bedeuten, so nimmt man, nachdem b bestimmt worden ist, a so an, daß $1\frac{1}{2}a$ größer als b wird, und kann nun die folgenden ganzen Zahlen bis in das Unendliche für a gebrauchen. Wenn hingegen das gegebene T eine solche ganze Zahl ist, deren Doppeltes keine vollkommene Quadratzahl oder kein Vielfaches einer solchen wird, so kann T nicht das T, sondern nur t, d. h. $z - y$ bedeuten, und das Gesuchte wird nach Seite 50 bis 52 vermittelst der angenommenen ganzen Zahl n gefunden.

Bei der dritten Aufgabe: x, y und z zu bestimmen, wenn $x - y = d$ gegeben ist, (vorausgesetzt daß y die kleinere Kathetenzahl bezeichnet,) wovon die

Auflösung Seite 53 bis 65 gegeben wurde, ist noch folgendes zu bemerken. Wenn man $\frac{a}{b}=\frac{5}{7}$ annimmt, so kann das gegebene d nicht nur jede vollkommene Q. Z. (wie S. 58 angegeben wurde,) sondern überhaupt jede beliebige ganze Zahl seyn. Denn es ist hier $2a^2-b^2=50-49=1$, und daher, (weil dieser der Divisor ist,) $2(a+b)bd+d=z$. Auch wenn man $\frac{a}{b}=\frac{17}{24}$ setzt, ist, (weil nun $2a^2-b^2=578-576=2$ ist,) $\frac{2(a+b)bd+d}{2}=z$, d. i. $(a+b)bd+d=z$. Uiberhaupt werden solcher Werthe von z unendlich viele seyn, wenn man aus einem gegebenen ächten Bruch $\frac{a}{b}$, bei dem $2a^2-b^2=1$ oder $=2$ ist, den nächstfolgenden von ähnlicher Beschaffenheit ableiten kann, und aus diesem wiederum den nächstfolgenden. Nun geschieht dieses aber mittelst des Ausdrucks $\frac{3a+2b}{4a+3b}$, weil bei solchem $2(3a+2b)^2-(4a+3b)^2=2a^2-b^2$ ist.

Z. B. Es sey $\frac{a}{b}=\frac{5}{7}$, (wobei $2a^2-b^2=1$ ist,) so ist $\frac{3\cdot5+2\cdot7}{4\cdot5+3\cdot7}=\frac{29}{41}$ der nächstfolgende ächte Bruch, bei dem auch $2\cdot29^2-41^2=1$ ist, und nun $\frac{29}{41}=\frac{a}{b}$ gesetzt, so wird daraus auf ähnliche Art der nächste Bruch $\frac{169}{239}$ hergeleitet, der eben diese Eigenschaft hat, u. s.

ferner in das Unendliche. Eben so, da bei dem achten Bruch $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$, $2a^2-b^2=2$ ist, so wird aus ihm auf ähnliche Art der nächstfolgende Bruch $\frac{3\cdot3+2\cdot4}{4\cdot3+3\cdot4}=\frac{9+8}{12+12}=\frac{17}{24}$ hergeleitet, bei welchem $2\cdot17^2-24^2$ oder $2a^2-b^2$ gleichfalls $=2$ ist, und aus $\frac{17}{24}$, wenn er $=\frac{a}{b}$ gesetzt wird, wiederum der nächstfolgende Bruch $\frac{51+48}{68+72}=\frac{99}{140}$, bei dem gleichfalls $2a^2-b^2=2$ ist, und so fort in das Unendliche. Also ist für jede beliebig gegebene ganze Zahl d, als Kathetenzahlen-Differenz, die Anzahl der Werthe für z, und also auch für x und y in ganzen Zahlen unendlich groß. Den Anfang der so entstehenden Reihen zeigen folgende Tabellen.

Für $2a^2-b^2=1$.

$\frac{a}{b}$	z	x	y
1	5 d	4 d	3 d
$\frac{5}{7}$	169 d	120 d	119 d
$\frac{29}{41}$	5741 d	4060 d	4059 d
$\frac{169}{239}$	195025 d	137904 d	137903 d
	⋮	⋮	⋮

Für $2a^2-b^2=2$.

$\frac{a}{b}$	z	x	y
$\frac{3}{4}$	29 d	21 d	20 d
$\frac{17}{24}$	985 d	697 d	696 d
$\frac{99}{140}$	33461 d	23661 d	23660 d
$\frac{577}{816}$	1136689 d	803761 d	803760 d
	⋮	⋮	⋮

Daraus kann nun das Seite 59, 60 und 62 Vorgetragene ergänzt werden. Uiberhaupt ist noch Folgendes zu bemerken:

Ausser den, nach der eben gezeigten Art hergeleiteten unendlich vielen Werthen, die man bei **jedem** gegebenen d für z, x und y finden kann, ergeben sich noch unendlich viele, wenn die gegebene ganze Zahl d die Eigenschaft hat, daß entweder 1) $\frac{d+1}{2}$, und wenn d durch die ganze Zahl n theilbar ist $\frac{\frac{d}{n}=1}{2}$ eine vollkommene Quadratzahl $=m^2$ ist, oder 2) daß $2d+2$, oder $\frac{2d}{n}+2$ eine vollkommene Quadratzahl ist, (welches allemal statt findet, wenn $\frac{d+1}{2}$ oder auch $\frac{\frac{d}{n}+1}{2}$ $=m^2$ ist, da in diesem Fall $d=2m^2-1$, also $2d=4m^2-2$ und $2d+2=4m^2=(2m)^2$ ist,) oder 3) daß $d+2$ oder $\frac{d}{n}+2$ eine vollkommene Quadratzahl ist. Findet das erste $\frac{d+1}{2}=m^2$ oder $\frac{\frac{d}{n}+1}{2}=m^2$ statt, und ist die ganze Zahl $m=\sqrt{\frac{d+1}{2}}$ oder $\sqrt{\frac{\frac{d}{n}+1}{2}}$ bestimmt worden, so lassen sich aus m, wenn es als unächter Bruch $\frac{m}{1}$ bezeichnet, und als $\frac{a}{b}$

betrachtet wird, mittelst der schon angegebenen Formel $\frac{3a+2b}{4a+3b}$ eine unendliche Reihe von Brüchen ableiten, wodurch also eine unendliche Menge z gefunden werden können. Da aber zugleich $2d+2$ oder $\frac{2d}{n}+2$ eine vollkommene Q.Zahl ist, so kann man noch zwei brauchbare Reihe Brüche herleiten. Denn man setze $\frac{a}{b}=\frac{b+1}{b}$ für die erste Reihe, und $=\frac{b-1}{2}$ für die zweite. Ferner nehme man an, es sei $\frac{a}{b}$ so beschaffen, daß $2d$ durch $2a^2-b^2$ theilbar ist, so ist $\frac{2d}{n}=2a^2-b^2$, d. i. $\frac{2d}{n}=2(b\pm1)^2-b^2=b^2\pm4b+2$. Wenn man hierauf diese Gleichung entwickelt, so ist $b=\mp2+\sqrt{(\frac{2d}{n}+2)}$, oder wenn $n=1$ also $2d$ selbst $=2a^2-b^2$ ist, so ist $b=-2+\sqrt{(2d+2)}$ für $\frac{b+1}{b}$, und $=2+\sqrt{(2d+2)}$ für $\frac{b-1}{b}$. Endlich kann man mittelst der Formel $\frac{3a+2b}{4a+3b}$ aus $\frac{b+1}{b}$ und aus $\frac{b-1}{b}$ zwei unendliche Reihen Brüche herleiten, so daß bei jedem, wenn er als $\frac{a}{b}$ betrachtet wird, $2a^2-b^2=2d$, oder $=\frac{2d}{n}$ ist. Ich will diese Verfahrungsart durch ein Beispiel erläutern.

Es sei die gegebene ganze Zahl $d=127$, so ist bei derselben 1) $\frac{d+1}{2}=\frac{128}{2}=64=m^2$, also $8=m$.

Daher z, nach der Formel S. 54, $=\frac{18d}{127}+d=\frac{145d}{127}=145$, $x=\frac{144d}{127}=144$ und $y=144-127=17$. Nun wird m oder $8=\frac{8}{1}=\frac{a}{b}$ gesetzt, so ist der folgende Bruch $\frac{24+2}{32+3}=\frac{26}{35}$, daraus der folgende: $\frac{78+70}{104+105}=\frac{148}{209}$ u. s. f. Nun ist nach der Formel S. 57, $z=(a+b)b\cdot\frac{2d}{2a^2-b^2}+d$. Gebraucht man also $\frac{26}{35}$, so ist $z=61\cdot35\cdot\frac{2\cdot127}{127}+127=61\cdot35\cdot2+127=4270=127=4397$, $x=\frac{26}{35}\cdot4270=3172$, und $y=3172-127=3045$. So verfährt man auch bei $\frac{148}{209}$ und den folgenden Brüchen. Nun ist aber auch 2) $2d+2=2.127+2=256$ eine vollk. Q.Zahl, und $\sqrt{256}=16$, also $b=\mp2+\sqrt{(2d+2)}=16-2$ und $16+2$, oder 14 und 18. Folglich $\frac{a}{b}=\frac{b+1}{b}=\frac{15}{14}$ und $=\frac{b-1}{b}=\frac{17}{18}$. Nun findet man aus $\frac{15}{14}$ die Reihe $\frac{73}{102}$, $\frac{423}{598}$ u. s. f. und aus $\frac{17}{18}$ die Reihe: $\frac{87}{122}$, $\frac{505}{714}$ u. s. f. in welchen Brüchen immer $2a^2-b^2=254$ ist. Wenn man aus der ersten Reihe $\frac{15}{14}$ gebraucht, ist nach obiger Formel $z=29\cdot14\cdot\frac{254}{254}+127=406+127=533$, $x=$

$\frac{15}{14} \cdot 406 = 435$, und $y = 435 - 125 = 308$. Gebraucht man $\frac{73}{102}$, so ist $z = 17977$, $x = 12775$ und $y = 12648$. Nimmt man die zweite Reihe vor, so ist aus $\frac{17}{18}$, $z = 35 \cdot 18 \cdot \frac{254}{254} + 127 = 630 + 127 = 757$, $x = 595$ und $y = 468$. Ferner aus $\frac{87}{122}$ ist $z = 209 \cdot 122 \cdot \frac{254}{254} + 127 = 25498 + 127 = 25625$, $x = 18183$ und $y = 18056$, u. s. f.

Wenn hingegen der dritte Fall statt findet, daß nemlich $d + 2$ oder auch $\frac{d}{n} + 2$ eine vollk. Q.Zahl ist, so kann man gleichfalls zwei unendliche Reihen brauchbarer Brüche, $\frac{a}{b}$, bei welchen immer $2a^2 - b^2 = d$ ist, herleiten. Man kann nemlich nach der vorigen Art leicht zeigen, daß wenn $\frac{a}{b} = \frac{b+1}{b}$ gesetzt wird, $b = -2 + \sqrt{(\frac{d}{n} + 2)}$ u. wenn $\frac{a}{b} = \frac{b-1}{b}$ gesetzt wird, $b = 2 + \sqrt{(\frac{d}{n} + 2)}$ ist, also wenn $n = 1$ ist, so ist $b = -2 + \sqrt{(d+2)}$ oder $b = +2 + \sqrt{(d+2)}$, und dabei immer $2a^2 - b^2 = d$. Z. B. Es sei die gegebene ganze Zahl $d = 23$, so ist zwar $\frac{d+1}{2} = \frac{23+1}{2} = 12$ keine vollk. Q.Zahl, auch nicht $2d + 2$, oder $2 \cdot 23 + 2 = 48$, allein dagegen ist $d + 2 = 23 + 2 = 25$ eine vollkommene Q.Zahl. Daher kann zwar m keine

andere ganze Zahl als 1 seyn, aber doch kann man, ausser den für jede beliebig gegebene ganze Zahl d geltenden Reihen, deren Anfang in der obigen kleinen Tabelle dargestellt ist, vermittelst der Formel $\frac{3a+2b}{4a+3b}$ noch zwei Reihen unendlich vieler Brüche finden, wodurch z, x und y in ganzen Zahlen bestimmt werden können, weil bei jedem dieser Brüche $2a^2 - b^2 = d = 23$ ist. Nemlich für $\frac{a}{b} = \frac{b+1}{b}$ ist hier $b = -2 + \sqrt{25} = -2+5 = 3$, also $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$, und für $\frac{a}{b} = \frac{-b-1}{b}$ ist hier $b = +2+5 = 7$, also $\frac{a}{b} = \frac{6}{7}$. Die Brüche der ersten Reihe sind; $\frac{4}{3}, \frac{18}{25}, \frac{104}{147}, \frac{606}{857}$ u. s. f. Die Brüche der zweiten Reihe sind; $\frac{6}{7}, \frac{32}{45}, \frac{186}{263}, \frac{1084}{1533}$ u. s. f. Wenn man nun aus der ersten Reihe $\frac{4}{3}$ gebraucht, so ist $z = \frac{7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 23}{23} + 23 = 42 + 23 = 65$, $x = \frac{4}{3} \cdot 42 = 56$ und $y = 56 - 23 = 33$. Gebraucht man $\frac{18}{25}$, so ist $z = \frac{43 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 23}{23} + 23 = 2150 + 23 = 2173$ u. s. f. Wenn man aber aus der zweiten Reihe $\frac{6}{7}$ gebraucht, so ist $z = \frac{13 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 23}{23} + 23 = 182 + 23 = 205$, $x = \frac{6}{7} \cdot 182 = 6 \cdot 26 = 156$, und $y = 156 - 23 = 133$ u. s. f.

Durch die Anwendung dieser Verfahrungsarten findet man aus dem gegebenen d, für z, und also auch für x und y so viele Werthe in ganzen Zahlen, als man will, ohne mühsame Versuche, sondern nach leichten und sichern Regeln.

Die fünfte Aufgabe heißt: x, y und z zu finden, wenn $y+z$ oder auch $x+z=F$ gegeben ist. Da $F=y+z$ ist, so ist $F-2y=z-y=t$, Setzt man nun $y=1, 2, 3, 4, 5$ u. s. f. so wird $t=F-2$, $F-4 \ldots . F-2m$, wenn m die Gliederzahl dieser Reihe bedeutet. Da nun ferner (Seite 48) $x^2=ts$, und $s=y+z=F$ ist, (weil nach S. 48 $y=\frac{s-t}{2}$ und $z=\frac{s+t}{2}$, also $y+z=s$ ist,) so ist $x=\sqrt{tF}$. Also muß tF, d. i. $(F-2)F$ oder überhaupt $(F-2m)F$ eine vollkommene Quadratzahl seyn, deren Quadratwurzel ist sodann x, und m ist $=y$. Endlich ist $z=F-y$. Aber $(F-4)F$ ist $=(F-2)F-2F$, ferner $(F-6)F=(F-4)F-2F$, und überhaupt $[F-(2m+2)]F=(F-2m)F-2F$, daher ergiebt sich daraus eine sehr leichte Verfahrungsart, deren Anwendung ich an einem Beispiel zeigen will.

Es sey das gegebene $F=32=y+z$. Also ist $(F-2)F=30 \cdot 32=960$, und $2F=64$. Folglich

960 — 64 = 896, ferner 896 — 64 = 832 u. s. f. immer von der nächst vorhergehenden Zahl die 64 subtrahirt, giebt folgende Reihe:

960	1	640	6	320	11
896	2	576*	7	256*	12
832	3	512	8	192	13
768	4	448	9	128	14
704	5	384	10	64*	15

Die drei in dieser Tabelle mit * bezeichneten Zahlen sind nun vollkommene Quadratzahlen, wie man leicht aus Quadrattafeln ersehen kann, in welchen man auch zugleich die Wurzeln angegeben findet. Diese ist = x. Also 1) $\sqrt{576} = 24 = x$, die in der Tabelle neben der Zahl 576 stehende Zahl $7 = y$, und $z = F - y = 32 - 7 = 25$. 2) $\sqrt{256} = 16 = x$, das danebenstehende $12 = y$, und $z = 32 - 12 = 20$. 3) $\sqrt{64} = 8 = x$. die neben 64 stehende Zahl $15 = y$, und $32 - 15 = 17 = z$.

Es sey ferner $F = y + z = 49$. Also $(F - 2) F = 47 . 49 = 2303$, und $2F = 98$. Also $2303 - 98 = 2205$, und $2205 - 98 = 2107$ u. s. f. giebt eine Reihe von 24 Zahlen, unter welchen sich drei vollkommene Quadratzahlen finden, nemlich 1225, 441 und 49. Nun ist $\sqrt{1225} = 35 = x$, das daneben gesetzte $12 = y$ und $z = F - y = 49 - 12 = 37$. Ferner ist $\sqrt{441} = 21 = x$, $20 = y$ und $29 = z$.

Endlich $\sqrt{49} = 7 = x$, $24 = y$ und $49 - 24 = 25 = z$. Dieses letzte Resultat kommt auch in dem vorigen Beispiel vor, nur sind die Kathetenzahlen x und y verwechselt, weil im vorigen Beispiel $7 + 25 = 32 = y + z = F$ gegeben war, in diesem aber $24 + 25 = F = 49$, gleich dem vorigen $x + z$ gegeben ist.

Aus dieser Herleitung ist begreiflich, daß eine Auflösung dieser Aufgabe in ganzen Zahlen nur statt findet unter folgenden Bedingungen: 1) Wenn das gegebene F gerade ist, so muß es eine vollkommene Quadratzahl, oder ein gerades Vielfaches oder ein gerader aliquoter Theil einer vollk. Q. Zahl seyn. 2) Wenn es aber ungerade ist, so muß es eine vollk. Q. Zahl, oder ein ungerades Vielfaches, oder ein ungerader aliquoter Theil einer vollkommenen Q. Zahl seyn.

Die sechste Aufgabe ist: Wenn $x + y = g$ gegeben ist, x, y und z in ganzen Zahlen zu finden. Die zur Auflösung dienende Formel kann auf zweierlei Art leicht hergeleitet werden. Nemlich 1) kann man wie Seite 53 und 54 verfahren, wenn man g statt d, ferner $g - x = y$, und $y - g = m\,(z - g)$ setzt, u. s. f. Man erhält so endlich die Gleichung: $z = g - \frac{2(m-1)g}{2m^2-1} = g - k$. Man kann aber auch

2) die Seite 51 stehenden Formeln für x und y addiren, so erhält man die Summe $x + y$, die man $=$ g setzt. Aus dieser Gleichung entwickelt man hierauf t, und diesen so gefundenen Werth von t setzt man statt t in der S. 52, Z. 1. stehenden Gleichung von z. Setzt man endlich $m - 1$ statt n, und reducirt gehörig, so erhält man die eben angegebene Formel für z. Da nun $y - g = m(z - g)$ gesetzt wurde, nnd $x + y = g$ ist, so ist $x = g - y = m(g - z) = m(g - g + k) = mk$, und $y = g - x$.

Hier kann in der Formel für z nicht wie bei der dritten Aufgabe $m = 1$ gesetzt werden, wegen des im Zähler enthaltenen $m - 1$, der kleinste Werth von m ist also $= 2$, daraus findet man $z = \frac{5}{7}g$, $x = \frac{4}{7}g$, und $y = \frac{3}{7}g$. Für $m = 3$ ist $z = \frac{13}{17}g$, für $m = 4$, ist $z = \frac{25}{31}g$, u. s. f. Wenn daher $g = 2m^2 - 1$ oder $= n(2m^2 - 1)$, und folglich $\frac{g+1}{2}$, oder

$$\frac{\frac{g}{n} + 1}{2} = m^2$$

d. h. eine vollkommene Quadratzahl ist, so kann ein Werth für z und also auch für x und y in ganzen Zahlen gefunden werden. Z. B. das gegebene g sey 71. Nun ist $\frac{71+1}{2} = 36 = m^2$ eine vollk.

Q. Z. also $m = 6$, daher $z = g - \frac{10\,g}{71} = \frac{61}{71} g = 61.$ $x = \frac{60}{71} g = 60$, und $y = g - x = 71 - 60 = 11.$ Es kann aber auch ein Werth von z in ganzen Zahlen statt finden, wenn das gegebene g so beschaffen ist, daß $g + 2$ eine vollkommene Q. Zahl wird. In diesem Fall ist m ein unächter Bruch $= \frac{a}{b}$. Alsdann verwandelt sich die vorige Formel in: $z = g - \frac{2(a-b)bg}{2a^2-b^2}$ und $x = \frac{2a(a-b)g}{2a^2-b^2}$, y aber ist $= g - x$. Nun kann hier, wegen des $a - b$ im Zähler, nicht $\frac{a}{b}$ ein ächter Bruch, wie in der dritten Aufgabe seyn, dadurch wird aber die Menge der zu findenden Werthe für z sehr beschränkt, weil sich nun die unendliche Reihe, da sie sogleich in ächte Brüche übergeht, nicht anwenden läßt. Wenn also $2a^2 - b^2 = g$ seyn soll, so muß $a = b + 1$ seyn, alsdann ist $b = -2 + \sqrt{(g+2)}$. Es sey z. B. das gegebene $g = 47$, so ist $\frac{g+1}{2}$ zwar keine vollk. Q. Z., aber doch $g + 2$. Also ist wohl m keine ganze Zahl, aber doch ein unächter Bruch $\frac{b+1}{b}$. Nun ist $b = -2 + \sqrt{(47+2)} = 5$, also $\frac{a}{b} = \frac{b+1}{b} = \frac{6}{5}$. Folglich $2a^2 - b^2 = 47$, und $2(a-b)b =$

$2 \cdot 1 \cdot 5 = 10$. Daher $z = g - \frac{10}{47}g = \frac{37}{47}g$, $x = \frac{2.6.1}{47}g = \frac{12}{47}g$, und $y = g - x = \frac{35}{47}g$. Da nun $g = 47$ ist, so ist $z = 37$, $x = 12$ und $y = 35$. Es sey ferner $g = 310$. Nun ist $310 = 10.31$, aber $\frac{31+1}{2} = 16 = m^2$. Also $m = 4$. Folglich $z = \frac{25}{31}g$, $x = \frac{24}{31}g$ und $y = \frac{7}{31}g$. Da aber $g = 310 = 31.10$, so ist $z = 250$, $x = 240$ und $y = 70$. Allein, da 310 auch $= 5.62$, und $62 + 2 = 64$ eine vollkommene Quadratzahl ist, so ist $b = -2 + \sqrt{64} = 6$, und $a = b + 1 = 7$, also $\frac{a}{b} = \frac{7}{6}$, und $z = g - \frac{12}{62}g = \frac{50}{62}g$, $x = \frac{14}{62}g$ und $y = \frac{48}{62}g$. Folglich, da $g = 62.5$. ist, so ist $z = 50.5 = 250$, $x = 14.5 = 70$, und $y = 48.5 = 240$. Hier ließ sich also aus dem gegebenen $g = 310$ der Werth von z auf zweierlei Art berechnen, und die Kathetenzahlen sind in verwechselter Ordnung.

Die siebente Aufgabe ist: x, y und z in ganzen Zahlen zu finden, wenn $x + y + z = S$ gegeben ist. Die Auflösung kann auf folgende Art leicht hergeleitet werden. Es sey $x^2 + y^2 = z^2$, ferner $z = s + t$ und $y = s - t$, so ist $z + y = 2s$ und $z - y$

$= 2t$. Nun ist $x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y)$ $= 4ts$, also $x = 2\sqrt{ts}$, und daher S oder $x + y + z = (z + y) + x = 2s + 2\sqrt{ts}$, folglich $\frac{1}{2}S = s + \sqrt{ts}$, und $\frac{1}{2}S - s = \sqrt{ts}$, also $\frac{1}{4}S^2 - Ss + s^2 = ts$ und $\frac{\frac{1}{4}S^2}{s} + s - S = t$, auch ist $\frac{1}{2}S - s = \frac{1}{2}x$. Die gegebene ganze Zahl S, die $= x + y + z$ seyn soll, muß also folgende Eigenschaften haben. 1.) Sie muß eine gerade Zahl seyn, weil $\frac{1}{2}S = s + \sqrt{ts}$ eine ganze Zahl seyn soll. 2.) Das Quadrat der Hälfte von S muß wenigstens einen Factor haben, der kleiner als $\frac{1}{2}S$, aber doch größer als $\frac{1}{4}S$ ist, und daher darf die Hälfte von S oder $\frac{1}{2}S$ keine Primzahl seyn. Denn weil $\frac{\frac{1}{4}S^2}{s}$ eine ganze Zahl werden soll, so ist s ein Factor von $\frac{1}{4}S^2$ oder von $(\frac{1}{2}S)^2$. Dieser Factor s muß aber kleiner seyn als $\frac{1}{2}S$, weil $\frac{1}{2}S - s = \frac{1}{2}x$ ist, und x eine positive Zahl werden muß. Er muß aber doch größer seyn als $\frac{1}{4}S$. Denn wenn er $\frac{1}{4}S$ ist, so ist $\frac{\frac{1}{4}S^2}{s} = \frac{\frac{1}{4}S^2}{\frac{1}{4}S} = S$, und da $\frac{\frac{1}{4}S^2}{s} + s - S = t$ ist, so ist nun $S + s - S = t$, d. i. $s = t$, also $y = s - t = s - s = 0$. Ist aber s sogar kleiner als $\frac{1}{4}S$, z. B. $= \frac{1}{4}S - n$, so ist $\frac{\frac{1}{4}S^2}{s} = \frac{\frac{1}{4}S^2}{\frac{1}{4}S - n} = S + \frac{nS}{\frac{1}{4}S - n}$, also $S + \frac{nS}{\frac{1}{4}S - n} + s - S = t$, oder $s + \frac{nS}{\frac{1}{4}S - n} = t$.

Also wird t größer als ſ, folglich ſ — t oder y eine negative Zahl, welches gegen die Bedingung der Aufgabe ist.

Beispiel. Es sey das gegebene $S = x + y + z = 210$, so ist $\frac{1}{2}S = 105$, also muß ſ kleiner als 105 aber größer als 52 seyn. Ferner ist $(\frac{1}{2}S)^2$ oder $\frac{1}{4}S^2 = (105)^2 = 11025$. Daher $t = \frac{11025}{ſ} + ſ - 210$. Nun zerlege man 11025 nach der bekannten Art in Factoren, nemlich:

11025	
2205	5
441	5, 25
147	3, 15, 75
49	3, 9, 45 ....
7	7, 21, 35, 63, 105 ....
1	7, 49, 147 ....

Von diesen Factoren, als ſ betrachtet, haben die erforderliche Eigenschaft: 63 und 75, denn jedes dieser beiden ſ ist kleiner als 105, und größer als 52. Also 1) ſ gesetzt $= 63$, so ist $\frac{\frac{1}{4}S^2}{ſ} = \frac{11025}{63} = 175$, und folglich $t = 175 + 63 - 210 = 28$. Folglich $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}S - ſ = 105 - 63 = 42$, und daher $x = 2.42 = 84$, $y = ſ - t = 63 - 28 = 35$, und $z = ſ + t = 63 + 28 = 91$. Nun 2) $ſ = 75$ ge-

setzt, so ist $\frac{11025}{75} = 147$, folglich $t = 147 + 75 - 210 = 12$. Also $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}S - s = 105 - 75 = 30$, daher $x = 60$, $y = s - t = 75 - 12 = 63$, und $z = s + t = 75 + 12 = 87$. Es sey ferner $S = 182$, so ist $\frac{1}{2}S = 91$, also muß s kleiner als 91 und größer als 45 seyn. Ferner ist $\frac{1}{4}S^2 = (91)^2 = 8281$. Zerlegt man dieses Quadrat in die Factoren: 7, 13, 49, 91 .... so ist bloß 49 als s brauchbar, alsdann ist $\frac{8281}{49} = 169$, und $t = 169 + 49 - 182 = 36$. Also $x = 2(91 - 49) = 84$, $y = s - t = 49 - 36 = 13$, und $z = s + t = 49 + 36 = 85$.

Anmerkung. Wenn $z - y$, oder $z - x = 2$, also $t = 1$ ist, so ist $\frac{1}{2}S = s + \sqrt{s}$. Da nun dieser Ausdruck die Form einer Pronikzahl ist, so ist, wenn $t = 1$, die Summe der drei Seitenzahlen eines pythagoräischen Zahlendreieks das Doppelte einer Pronikzahl, x das Doppelte der Pronikwurzel, und $y + z$ das doppelte Quadrat dieser Pronikwurzel.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Müller, Johann Wolfgang

Neue Beiträge zu der Parallelen-Theorie, den Beweisen des Pythagoräischen Lehrsatzes und den Berechnungsarten der Pythagoräischen Zahlendreiecke

Augsburg und Leipzig [1826]

Math.p. 369 c
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082452-6